

AD-A105 708

ADVISORY GROUP FOR AEROSPACE RESEARCH AND DEVELOPMENT--ETC F/6 1/3
NON-LINEAR AEROELASTIC ANALYSES AND TESTING, (U)

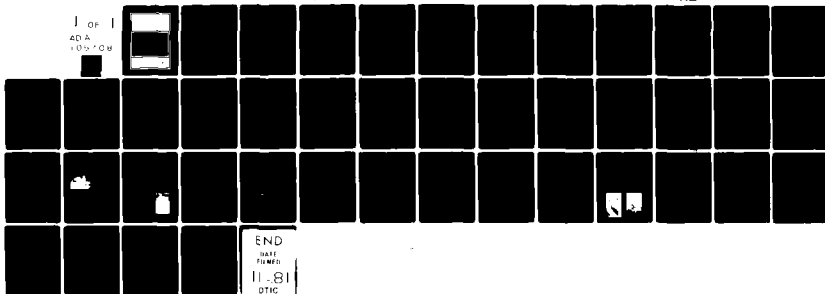
JUL 81 R DAT, P DUNOYER, R FREYMAN

UNCLASSIFIED

AGARD-R-698

NL

1 OF 1
ADA
105708



END
DATE
FILMED
11-81
DTIC

LEVEL 7

(2)

AGARD-R-698

AGARD-R-698

AD A105708

AGARD

ADVISORY GROUP FOR AEROSPACE RESEARCH & DEVELOPMENT

7 RUE ANCELLE 92200 NEUILLY SUR SEINE FRANCE

AGARD REPORT No. 698

Non-Linear Aeroelastic Analyses and Testing

This document has been approved
for public release and sale; its
distribution is unlimited.

A

NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION



DISTRIBUTION AND AVAILABILITY
ON BACK COVER

10 10 19

2016 FILE 0517

14

AGARD-R-698

NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION
ADVISORY GROUP FOR AEROSPACE RESEARCH AND DEVELOPMENT
(ORGANISATION DU TRAITE DE L'ATLANTIQUE NORD)

13) +1

11 Jul 84

6

AGARD Report No.698

NON-LINEAR AEROELASTIC ANALYSES AND TESTING

by

10

Rolland ~~Dat~~ and Philippe Dunoyer
ONERA
29 ave de la Division Leclerc
92320 Châtillon, France

and

Raymond Freymann
DFVLR-AVA Göttingen
Institut für Aeroelastik
Bunsenstrasse 10
3400 Göttingen, Germany

Papers presented at the 52nd Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel
held in Çeşme, Turkey on 5-10 April 1981.

400043 104

THE MISSION OF AGARD

The mission of AGARD is to bring together the leading personalities of the NATO nations in the fields of science and technology relating to aerospace for the following purposes:

- Exchanging of scientific and technical information;
- Continuously stimulating advances in the aerospace sciences relevant to strengthening the common defence posture;
- Improving the co-operation among member nations in aerospace research and development;
- Providing scientific and technical advice and assistance to the North Atlantic Military Committee in the field of aerospace research and development;
- Rendering scientific and technical assistance, as requested, to other NATO bodies and to member nations in connection with research and development problems in the aerospace field;
- Providing assistance to member nations for the purpose of increasing their scientific and technical potential;
- Recommending effective ways for the member nations to use their research and development capabilities for the common benefit of the NATO community.

The highest authority within AGARD is the National Delegates Board consisting of officially appointed senior representatives from each member nation. The mission of AGARD is carried out through the Panels which are composed of experts appointed by the National Delegates, the Consultant and Exchange Programme and the Aerospace Applications Studies Programme. The results of AGARD work are reported to the member nations and the NATO Authorities through the AGARD series of publications of which this is one.

Participation in AGARD activities is by invitation only and is normally limited to citizens of the NATO nations.

The content of this publication has been reproduced
directly from material supplied by AGARD or the authors.

Published July 1981

Copyright © AGARD 1981
All Rights Reserved

ISBN 92-835-0296-5



*Printed by Technical Editing and Reproduction Ltd
Harford House, 7-9 Charlotte St, London, W1P 1HD*

PREFACE

The AGARD Subcommittee on Aeroelasticity heard two short presentations during the Spring 1981 meeting in Çeşme, Turkey.

Mr Dat of ONERA presented a lucid exposition of the ground vibration testing of aircraft with active control systems. Dr Freymann of Luxembourg (and DFVLR) presented a method to perform and interpret dynamic tests on nonlinear systems, such as control surface actuators.

The Subcommittee unanimously agreed to publish the two papers in one AGARD report since they are an important contribution to the technology of active control.



JAMES J. OLSEN
Chairman
Subcommittee on Aeroelasticity

✓

Codes	
Dist	Special
A	

CONTENTS

	Page
IDENTIFICATION DES MODES PROPRES D'UNE STRUCTURE A PARTIR DES REPONSES A UNE EXCITATION NON APPROPRIEE par R.Dat et P.Dunoyer	1
NON LINEAR AEROELASTIC ANALYSES TAKING INTO ACCOUNT ACTIVE CONTROL SYSTEMS by R.Freymann	19

IDENTIFICATION DES MODES PROPRES D'UNE STRUCTURE A PARTIR DES REPONSES
A UNE EXCITATION NON APPROPRIEE

par Rolland Dat et Philippe Dunoyer

Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques (ONERA)
92320 - Châtillon (France)

RESUME

On présente deux méthodes qui permettent de traiter les réponses harmoniques d'une structure en un grand nombre de points pour déterminer les modes propres de vibration, sans que l'excitation ait besoin d'être appropriée. La première de ces méthodes, plus synthétique, détermine l'ensemble des caractéristiques modales par résolution d'un système d'équations algébriques ; la seconde, plus analytique, procède à une isolation de chacun des modes en combinant les réponses harmoniques des différents points de la structure.

Les résultats montrent que ces méthodes permettent d'obtenir une modélisation satisfaisante de la structure à travers la représentation modale.

SUMMARY

IDENTIFICATION OF THE EIGEN MODES OF A STRUCTURE FROM THE RESPONSES
TO A NON APPROPRIATED EXCITATION

The two methods which are presented use the harmonic responses, at a large number of points on the structure, in order to determine the eigen modes, without necessitating an appropriation of the excitation forces. The first one of the methods, which is more synthetic, determines the set of modal characteristics through the resolution of a set of algebraic equations ; the second one, which is more analytic, proceeds to a separation of each mode by combining the harmonic responses of the different points of the structure.

The results show that the two methods give a satisfactory modelisation of the structure through the modal representation.

- CONVENTION -

$()^T$ = transposée simple

$(\bar{})$ = transposée conjuguée

$$V = V' + i V'' \Rightarrow \begin{cases} V^T = V'^T + i V''^T \\ \bar{V} = V'^T - i V''^T \end{cases}$$

INTRODUCTION

Les méthodes d'essai de vibration visant à déterminer les modes propres d'une structure peuvent se diviser en deux catégories : celles qui passent explicitement ou non par l'appropriation de l'excitation et celles qui ne nécessitent pas l'appropriation. A l'époque où l'on ne disposait pas de moyens de calcul rapides sur les lieux des essais, il fallait isoler chacun des modes de la structure par une excitation appropriée avant de pouvoir déterminer ses caractéristiques, [1] à [3]. Mais l'avènement des ordinateurs rapides et peu encombrants offre, depuis quelques années, la possibilité de développer et d'appliquer de nouvelles méthodes dans lesquelles les réponses vibratoires de la structure subissent un traitement complexe impliquant le calcul de systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Certaines de ces méthodes partent de plusieurs essais effectués avec des excitations non appropriées mais indépendantes et font un traitement par le calcul qui revient à rechercher, de façon explicite ou non, la combinaison d'essais non appropriés simulant au mieux un essai approprié. [4] à [6].

Ces méthodes appartiennent donc à la catégorie de celles qui passent par l'appropriation de l'excitation. En principe elles ne peuvent être appliquées que si les excitations indépendantes attaquent tous les degrés de liberté de la structure de manière à permettre la reconstitution, par combinaison linéaire, d'une excitation appropriée. En pratique il suffit qu'elles attaquent les degrés de liberté intervenant de façon significative dans la gamme de fréquence considérée.

Les méthodes qui s'affranchissent réellement de l'appropriation permettent de déterminer les caractéristiques de plusieurs modes avec une seule répartition des forces d'excitation. De ce fait elles apportent une simplification considérable sur le plan expérimental et elles offrent la possibilité de réaliser des essais significatifs dans les cas où la structure ne peut être excitée qu'en un nombre limité de points, voire même en un seul point.

Le lissage des fonctions de transfert par des fractions rationnelles, devenu classique depuis quelques années, est une de ces méthodes. Il ne sera pas décrit ici, parce qu'il a déjà fait l'objet de plusieurs publications, [7] à [10], et nous nous bornerons à rappeler qu'à chaque degré de liberté (ou à chaque point) de la structure, il fait correspondre une fraction rationnelle dont les pôles s'identifient aux pôles de la structure elle-même, tandis que les résidus définissent les formes propres.

Le lissage par fraction rationnelle a été appliqué par l'ONERA à une structure du lanceur ARIANE excitée en une seule section. Les modes sont déterminés de façon satisfaisante, du moins pour les points de grande amplitude, mais les temps de calcul sont assez longs et la méthode présente l'inconvénient de donner des pôles entachés d'une erreur expérimentale différente d'un point à l'autre de la structure.

Le présent exposé est limité à deux méthodes qui ne présentent pas ce dernier inconvénient, car elles prennent en considération l'ensemble des points de la structure pour déterminer chacun des pôles et ne fournissent donc qu'un seul pôle par mode. La première de ces méthodes, plus synthétique, détermine l'ensemble des caractéristiques modales par résolution d'un système d'équations algébriques ; la seconde, plus analytique, procède à une isolation de chacun des modes en combinant les réponses harmoniques des différents points de la structure.

Ces méthodes peuvent s'appliquer à n'importe quel système régi par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, mais c'est uniquement l'application aux structures qui sera développée et illustrée ici.

Remarquons, pour terminer cette introduction, que si ces méthodes s'accommodent d'une excitation non-appropriée, il ne faut pas en déduire que l'excitation peut être quelconque. La détermination d'un mode n'est possible, en effet, que si l'excitation lui fournit assez d'énergie pour qu'il émerge suffisamment des réponses vibratoires. A défaut d'être appropriée, l'excitation doit donc posséder un minimum d'efficacité pour les modes que l'on désire identifier.

I - METHODE DE SYNTHESE MODALE

La structure est assimilée à un système linéaire discret à n degrés de liberté régi par l'équation du second ordre :

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + KX = E$$

I-I-1

où M , B et K sont des matrices réelles, symétriques, positives, à coefficients constants, de dimension $n \times n$.

X et E sont des colonnes de dimension n qui dépendent du temps : $X(t)$ est le vecteur réponse du système et $E(t)$ le vecteur excitation.

On admettra que les variables X_k qui constituent le vecteur X sont accessibles à la mesure et qu'elles sont indépendantes.

En régime harmonique, $X(t)$ et $E(t)$ sont remplacés par $xe^{i\omega t}$ et $Ee^{i\omega t}$, x et E désignant dans ce cas des colonnes indépendantes de t . On a :

$$[-\omega^2 M + i\omega B + K]X = E$$

I-I-2

La colonne \bar{E} est réelle si l'excitation est équiphasée et prise pour référence de phase. Dans ce qui suit on admettra que cette condition est réalisée dans les essais considérés. Au cours de l'essai harmonique, l'excitation \bar{E} est imposée et l'on détermine le vecteur réponse \bar{X} à partir des mesures de déflexion. On considère les résultats obtenus lors d'un balayage en fréquence effectué avec un vecteur excitation \bar{E} indépendant de la pulsation ω .

I-1 Détermination des produits matriciels $\bar{M}^{-1}K$, $\bar{M}^{-1}B$ et $\bar{M}^{-1}E$

Compte tenu de la symétrie des matrices M , B et K , l'équation (I-1-2) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \bar{X} & -i\omega \bar{X} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} KM^{-1} \\ BM^{-1} \\ \bar{E}M^{-1} \end{bmatrix} = \omega^2 \bar{X} \quad \text{I-1-3}$$

Dans cette équation, le vecteur $\bar{X} (i\omega)$ est connu et les matrices KM^{-1} , BM^{-1} et $\bar{E}M^{-1}$ sont inconnues.

L'équation (I-1-3) ne peut pas être résolue directement. De plus, dans la plupart des applications pratiques, elle ne peut être vérifiée que de façon approchée à toutes les valeurs de ω , parce que la mesure du vecteur \bar{X} est entachée d'erreurs et que la structure essayée n'est pas rigoureusement conforme au modèle linéaire, discret, du second ordre.

Une solution approchée peut être obtenue, pour chacune des colonnes de la matrice inconnue, en cherchant le minimum du scalaire E_r défini par :

$$E_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \begin{bmatrix} \bar{X} & -i\omega \bar{X} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} KM^{-1} \\ BM^{-1} \\ \bar{E}M^{-1} \end{bmatrix} e_r - \omega^2 \bar{X} e_r \right|^2 d\omega$$

où e_r est le vecteur clé qui extrait la $r^{\text{ième}}$ colonne. En résolvant ce problème de minimum comme indiqué dans l'annexe A, pour toutes les colonnes ($r = 1, 2, \dots, n$), on obtient la solution :

$$\begin{bmatrix} KM^{-1} \\ BM^{-1} \\ \bar{E}M^{-1} \end{bmatrix} = \left[\mathcal{R} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ i\omega \bar{X} \\ -1 \end{bmatrix} d\omega \right]^{-1} \mathcal{R} \int_0^{\infty} \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{X} \\ i\omega \bar{X} \\ -1 \end{bmatrix} \bar{X} d\omega$$

I-2

L'équation (I-2) détermine donc la matrice inconnue à partir du vecteur $\bar{X} (i\omega)$. On déduit les produits matriciels $\bar{M}^{-1}K$, $\bar{M}^{-1}B$ et $\bar{M}^{-1}E$ en transposant.

En pratique, les intégrales de 0 à l'infini peuvent être remplacées par des sommations sur les fréquences de mesure.

I-2 Détermination des caractéristiques modales.

La représentation modale est réalisée en effectuant le changement de variable qui rend les matrices de masse et de raideur diagonales. Ce changement de variable est défini par une matrice inconnue Θ , carrée, régulière, de dimension $n \times n$. On a :

$$\bar{X} = \Theta q$$

I-3-I

où q est la colonne des variables de la représentation modale.

En substituant dans (I-2) et en prémultipliant par $\bar{\Theta}$, il vient :

$$[-\omega^2 \mu + i\omega \beta + \gamma] q = Q \quad \text{I-3-2}$$

avec :

$$\mu = \bar{\Theta} M \Theta \quad \text{I-3-3}$$

$$\gamma = \bar{\Theta} K \Theta \quad \text{I-3-4}$$

$$\beta = \bar{\Theta} B \Theta \quad \text{I-3-5}$$

Il faut déterminer la matrice Θ qui rend μ et γ diagonales, après quoi on devra déterminer les matrices μ et γ elles-mêmes et la matrice β .

Pour déterminer Θ , on part du produit matriciel $\bar{M}^{-1}K$ déduit de l'équation (I-2).

D'après (I-3-3) et (I-3-4) on a : $M^{-1}K = \Theta M^{-1}\gamma \Theta^{-1}$

Le produit matriciel $M^{-1}\gamma$ est la diagonale des valeurs propres du système conservatif associé. En posant

$$\gamma^2 = M^{-1}\gamma$$

I-4-1

on déduit que les pulsations propres γ_r et les vecteurs Θe_r de la matrice Θ sont les solutions du problème :

$$[\gamma_r^2 - M^{-1}K] \Theta e_r = 0$$

I-4-2

Connaissant la matrice Θ et le produit matriciel $M^{-1}B$, déduit de l'équation (I-2), on détermine le produit matriciel $M^{-1}B$ d'après (I-3-3) et (I-3-5) :

$$M^{-1}B = \Theta M^{-1}B \Theta$$

I-4-3

Enfin, pour déterminer la matrice μ , il faut partir des vecteurs $M^{-1}E$ déduits de l'équation (I-2). On a :

$$M^{-1}E = \Theta M^{-1}\bar{\Theta} E$$

d'où :

$$\mu \Theta^{-1} M^{-1}E = \bar{\Theta} E$$

d'où, μ étant diagonale, et μ_r en désignant par μ_r l'élément $\bar{e}_r \mu e_r$

$$\mu_r = \frac{\bar{e}_r \bar{\Theta} E}{\bar{e}_r \Theta^{-1} M^{-1}E}$$

I-4-4

$\bar{e}_r \bar{\Theta} E$ désigne le $r^{\text{ième}}$ terme du produit matriciel $\bar{\Theta} E$, et de même pour $\bar{e}_r \Theta^{-1} M^{-1}E$

On remarque que la matrice de changement de variables Θ et les produits matriciels $M^{-1}\gamma$ et $M^{-1}B$ sont déterminés à partir du vecteur réponse, $X(i\omega)$, sans qu'il soit nécessaire de connaître l'excitation E . Celle-ci n'intervient que dans la formule (I-4-4) pour le calcul des masses généralisées μ_r .

2 - METHODE D'ISOLATION MODALE

2-1 Cas général. Dans la méthode présentée dans ce paragraphe, l'isolation des modes est réalisée en superposant linéairement les réponses des différents degrés de liberté à une excitation harmonique.

Comme dans le paragraphe précédent, la structure est assimilée à un système linéaire discret à n degrés de liberté régi par l'équation :

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + KX = E$$

On obtient la forme canonique en posant :

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ i\omega X \end{pmatrix}$$

2-1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix}$$

2-2

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}E \end{pmatrix}$$

2-3

Il vient :

$$Z(i\omega) = [i\omega - A]^{-1} F$$

2-4

La matrice A est carrée, de dimension $2n \times 2n$;

Z et F sont des colonnes de dimension $2n$;

$Z(i\omega)$ est le vecteur d'état du système.

2-1-1 Principe de la séparation modale

Supposons que A possède $2n$ valeurs propres distinctes λ_k , et désignons par u_k et v_k les vecteurs propres, respectivement à droite et à gauche, de A . Les vecteurs v_k et u_l sont orthogonaux, pour $l \neq k$, et si, de plus, les vecteurs u_l sont convenablement normalisés, on a :

$$v_k^T u_l = \delta_{kl} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Les p_k , u_k et v_k^T constituent les éléments de la décomposition en éléments simples du vecteur $Z(i\omega)$

$$Z(i\omega) = \sum_k \frac{u_k v_k^T F}{i\omega - p_k}$$

En prémultipliant par l'un des vecteurs v_r^T , puis en transposant, on obtient l'équation :

$$Z^T(i\omega) v_r = \frac{F^T v_r}{i\omega - p_r} \quad 2-6$$

Cette équation montre que la superposition des variables d'état définie par le vecteur v_r isole un mode propre du système.

Connaissant le vecteur d'état Z (qui peut être déduit des mesures de réponse dans un essai harmonique avec balayage en fréquence), on peut trouver les solutions de (2-6), c'est-à-dire les v_r et les p_r , par itération.

2-I-2 Recherche des solutions (v_r, p_r) par itération

Les vecteurs v_r peuvent être normalisés de façon arbitraire. Si on les normalise en posant :

$$F^T v_r = 1 \quad 2-7$$

l'équation (2-6) devient :

$$Z^T(i\omega) v_r = \frac{1}{i\omega - p_r} \quad 2-8$$

Les solutions de cette équation peuvent s'obtenir par itération : partant d'une valeur estimée de p_r on détermine le vecteur v_r qui vérifie l'équation (2-8) de façon exacte ou approchée, dans une gamme de fréquence assez large, puis partant de ce vecteur v_r on détermine p_r et on recommence.

Mais lorsque p_r et v_r sont complexes, il est plus avantageux de combiner l'équation (2-8) relative à p_r avec l'équation relative à p_r^* . En désignant par $-r$ l'indice qui repère la valeur propre p_r^* et le vecteur propre correspondant, la condition de normalisation (2-7) et l'équation (2-8) deviennent :

$$F^T v_{-r} = 1$$

$$Z^T(i\omega) v_{-r} = \frac{1}{i\omega - p_r^*}$$

D'où, en faisant la somme et la différence avec (2-8) :

$$Z^T [v_r + v_{-r}] = \frac{2i\omega - (p_r + p_r^*)}{-\omega^2 - i\omega(p_r + p_r^*) + p_r p_r^*}$$

$$Z^T [v_r - v_{-r}] = \frac{p_r - p_r^*}{-\omega^2 - i\omega(p_r + p_r^*) + p_r p_r^*}$$

En posant :

$$p_r = i\gamma_r - \alpha_r v_r \quad 2-9-1$$

$$y_r' = \frac{1}{2} (v_r + v_{-r}) \quad 2-9-2$$

$$y_r'' = -\frac{i}{2} (v_r - v_{-r}) \quad 2-9-3$$

il vient :

$$Z^T(i\omega) y_r'' = \frac{\gamma_r}{-\omega^2 + 2i\omega\alpha_r \gamma_r + \gamma_r^2(1 + \alpha_r^2)} \quad 2-10-1$$

$$Z^T(i\omega) y_r' = \frac{i\omega + \alpha_r \gamma_r}{-\omega^2 + 2i\omega\alpha_r \gamma_r + \gamma_r^2(1 + \alpha_r^2)} \quad 2-10-2$$

On peut déterminer les solutions de (2-10-1), c'est-à-dire y_r'' , α_r et γ_r , par itération, puis reporter α_r et γ_r dans (2-10-2) et calculer y_r' .

Pour les raisons déjà invoquées (erreurs de mesure et/ou système non rigoureusement conforme au modèle théorique), les équations (2-8) et (2-10) n'admettent souvent que des solutions approchées.

Celles-ci doivent être calculées à l'aide d'algorithmes de résolution par les moindres carrés. Par exemple, la recherche des solutions de (2-10-1) par itération comporte, à chaque pas d'itération, deux séquences de lissage par les moindres carrés :

y_r' - dans la première séquence, partant des valeurs α_r et ν_r du pas précédent, on calcule le vecteur y_r' qui rend minimum l'écart ε_1 défini par :

$$\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| Z^T y_r'' - \frac{\nu_r}{-\omega^2 + 2i\omega\alpha_r\nu_r + \nu_r^2(1+\alpha_r^2)} \right|^2 d\omega$$

et y_r'' est obtenu en appliquant la formule A-1 de l'annexe A.

- dans la deuxième séquence, on pose $2\alpha_r\nu_r = b$, $\nu_r^2(1+\alpha_r^2) = c$, on introduit une inconnue auxiliaire, a , et on cherche les valeurs de a , b et c qui rendent minimum ε_2 défini par :

$$\varepsilon_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| (-\omega^2 + i\omega b + c) Z^T y_r'' - a \right|^2 d\omega$$

A chaque pas d'itération, l'inconnue auxiliaire a doit tendre vers ν_r .

En pratique, les intégrales de $-\infty$ à ∞ peuvent être remplacées par des sommations sur ω_k et $-\omega_k$, les ω_k étant les fréquences de mesure.

Remarque 1 -

ν_r étant le vecteur propre associé à la valeur propre p_r , son conjugué ν_r^* est vecteur propre associé à $p_r^* = p_r$. Le vecteur ν_r se déduit donc du vecteur ν_r^* en lui appliquant la condition de normalisation $\mathcal{F}^T \nu_r = 1$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\nu_r = \frac{\nu_r^*}{\mathcal{F}^T \nu_r^*}$$

Si le vecteur \mathcal{F} est réel (cas de l'excitation équiphasée et prise comme référence de phase), on a

$$\mathcal{F}^T \nu_r^* = (\mathcal{F}^T \nu_r)^* = 1 \quad (\text{d'après (2-7), d'où : } \nu_r = \nu_r^*)$$

On en déduit, d'après (2-9-2) et (2-9-3), que y_r' est la partie réelle de ν_r et y_r'' la partie imaginaire :

$$y_r' = \frac{1}{2} (\nu_r + \nu_r^*)$$

$$y_r'' = \frac{i}{2} (\nu_r - \nu_r^*)$$

Les vecteurs y_r' et y_r'' des équations (2-10-1) et (2-10-2) sont donc réels lorsque \mathcal{F} est réel.

Remarque 2 -

On voit que l'isolation modale par itération peut être effectuée sans qu'il soit nécessaire de connaître le vecteur excitation et la matrice M .

Remarque 3 -

Le processus d'isolation modale donnant les valeurs propres p_r et les vecteurs propres à gauche ν_r , on peut, en principe, reconstituer la matrice A et le vecteur \mathcal{F} .

$$A = (\nu_r^T)^{-1} P \nu_r^T$$

où ν_r est la matrice des vecteurs ν_r et P la matrice diagonale des valeurs propres p_r . Le vecteur \mathcal{F} est déterminé par la condition de normalisation, $\nu_r^T \mathcal{F} = I$, d'où l'on déduit :

$$\mathcal{F} = [\nu_r^T]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2-2 Système passif faiblement dissipatif

La plupart des structures peuvent être assimilées à des systèmes passifs faiblement dissipatifs. Avec la représentation modale, l'équation de la dynamique devient quasi diagonale et s'écrit :

$$[-\omega^2 \mu + i\omega \beta + \gamma] q = Q$$

2-II-1

où μ et γ sont des matrices diagonales et β une matrice symétrique mais généralement pas diagonale. La matrice entre crochets, peut être considérée comme quasi diagonale parce que les coefficients β_{rs} sont petits.

La forme canonique est obtenue en posant :

$$z = \begin{pmatrix} q \\ i\omega q \end{pmatrix}$$

2-II-2

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1}\gamma & -\mu^{-1}\beta \end{bmatrix}$$

2-II-3

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^{-1}Q \end{pmatrix}$$

2-II-4

L'hypothèse du système faiblement dissipatif peut se traduire, sur le plan mathématique en considérant les coefficients de la matrice β comme des infiniment petits du premier ordre, alors que les coefficients de μ et de γ sont des grandeurs finies. Si l'on admet, en outre, que les fréquences propres sont suffisamment distinctes pour que $\nu_r - \nu_s$ soit une grandeur finie $\forall s \neq r$, on peut expliciter ν_r jusqu'au premier ordre. Il vient (voir annexe B) :

$$\nu_r = \begin{pmatrix} \gamma [1 + i\psi] e_r \\ -p_r \mu [1 + i\psi] e_r \end{pmatrix}$$

2-I2-1

où ψ est une matrice de dimension $n \times n$ dont les coefficients, infiniment petits, sont définis par :

$$e_k^T \psi e_r = \begin{cases} -\frac{\nu_r \beta_{kr}}{\mu_k (\nu_k^2 - \nu_r^2)} & k \neq r \\ 0 & k = r \end{cases}$$

2-I2-2

En remplaçant F par (2-II-4), on a :

$$F^T \nu_r = -p_r e_r^T (1 + i\psi^T) Q$$

et le vecteur ν_r normalisé par la condition $F^T \nu_r = 1$ est donné par :

$$\nu_r = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma [1 + i\psi] e_r}{p_r e_r^T [1 + i\psi^T] Q} \\ \frac{\mu [1 + i\psi] e_r}{e_r^T [1 + i\psi^T] Q} \end{pmatrix}$$

2-I3

Considérons le cas de l'excitation équiphasée, ce qui rend la colonne Q réelle. En appliquant la formule (2-I0-I) aux coordonnées généralisées q on a :

$$[q^T \mid i\omega q^T] y_r'' = \frac{\nu_r}{-\omega^2 + 2i\omega\alpha_r \nu_r + \nu_r^2}$$

2-I4

(α_r^2 a été négligé, α_r étant infiniment petit dans l'hypothèse du système faiblement dissipatif).

Dans cette équation, y_r'' est la partie imaginaire du vecteur ν_r défini par (2-I3). En remplaçant p_r par $i\nu_r - \alpha_r \nu_r$ et en négligeant les termes du second ordre, la formule (2-I3) donne :

$$y_r'' = \begin{pmatrix} C_r' \\ C_r'' \end{pmatrix}$$

2-I5-1

où C_r' et C_r'' sont des colonnes de dimension n données par :

$$C_r' = \frac{\gamma e_r}{\nu_r e_r^T Q}$$

2-I5-I

$$C_r'' = \frac{\mu (\psi e_r e_r^T - e_r e_r^T \psi^T) Q}{(e_r^T Q)^2}$$

2-I5-3

Mais en général on ne peut pas accéder directement aux coordonnées modales q et on mesure d'autres variables X assimilables à des degrés de liberté : les vecteurs X et q sont reliés par une équation de changement de variables définie par une matrice carrée réelle :

$$X = \Theta q$$

2-I6

Des équations (2-I4), (2-I5) et (2-I6) on déduit :

$$X^T(i\omega) \begin{bmatrix} \xi_r \\ \eta_r \end{bmatrix} = \frac{\nu_r}{-\omega^2 + 2i\omega\alpha_r \nu_r + \nu_r^2}$$

2-I7-I

où ξ_r et η_r sont des vecteurs réels d'ordre n définis par :

$$\xi_r = [\Theta^T]^{-1} e_r \frac{\mu_r \nu_r}{e_r^T Q} \quad 2-17-2$$

$$\eta_r = \frac{[\Theta^T]^{-1} (\Psi e_r e_r^T - e_r e_r^T \Psi^T) Q}{(e_r^T Q)^2} \quad 2-17-3$$

Les coefficients α_r , ν_r et les vecteurs ξ_r et η_r peuvent être déterminés en résolvant l'équation (2-17-1) par itération comme indiqué dans le paragraphe (2-1-2).

On remarque que le vecteur η_r est nul si la matrice de dissipation est diagonale, c'est-à-dire si l'on a $\beta_{kr} = 0$, $k \neq r$

Détermination des matrices Θ et μ

Les masses généralisées μ_r et la matrice Θ se déduisent des vecteurs ξ_r . On remarque que $\mu_r \nu_r / e_r^T Q$ est un nombre réel qui dépend de la normalisation des formes propres et qui a la dimension d'un temps. Fixer arbitrairement la valeur de ce rapport revient donc à normaliser la forme propre. Posons par exemple :

$$\frac{\mu_r \nu_r}{e_r^T Q} = \frac{1}{\nu_r} \quad 2-18$$

En substituant dans (2-17-2) il vient :

$$[\Theta^T]^{-1} e_r = \xi_r \nu_r$$

d'où, en désignant par ξ la matrice des vecteurs ξ_r et par ν la matrice diagonale des fréquences propres ν_r ,

$$\Theta = [\xi^T]^{-1} [\nu]^{-1} \quad 2-19$$

Les masses généralisées sont déduites de la condition de normalisation (2-18) :

$$\mu_r = e_r^T Q / \nu_r^2 \quad 2-20$$

La colonne Q est déterminée si l'on connaît le vecteur excitation E dans le système de variables X . Le théorème des travaux virtuels donne en effet :

$$\delta \bar{X} E = \delta \bar{q} Q \quad \text{d'où l'on déduit, d'après (2-16) :}$$

$$Q = \Theta^T E$$

Détermination des coefficients β_{rs} , $s \neq r$

Les coefficients non diagonaux de la matrice β peuvent être déduits des vecteurs η_r donnés par (2-17-3). En prémultipliant η_r par la matrice Θ^T on a :

$$\Theta^T \eta_r = \frac{\mu (\Psi e_r e_r^T - e_r e_r^T \Psi^T) Q}{(e_r^T Q)^2}$$

$\Theta^T \eta_r$ est un vecteur d'ordre n . Multiplions le à gauche par e_k^T , $k \neq r$, pour extraire le $k^{\text{ième}}$ terme. Il vient :

$$\begin{aligned} e_k^T \Theta^T \eta_r &= \frac{e_k^T \mu e_k e_k^T \Psi e_r e_r^T Q}{(e_r^T Q)^2} \\ &= \frac{\mu_k e_k^T \Psi e_r}{e_r^T Q} \\ &= - \frac{\nu_r \beta_{kr}}{(\nu_k^2 - \nu_r^2) e_r^T Q} \quad (\text{d'après 2-12-2}) \end{aligned}$$

D'où

$$\beta_{kr} = \frac{(\nu_r^2 - \nu_k^2) [e_k^T Q] [e_k^T \Theta^T \eta_r]}{\nu_r} \quad 2-21$$

où $e_r^T Q$ est le $r^{\text{ième}}$ coefficient de la colonne Q et $e_k^T \Theta_{\eta}$ le $k^{\text{ième}}$ coefficient de la colonne Θ_{η}

3 - APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES CARACTERISTIQUES MODALES D'UNE STRUCTURE.

Les méthodes présentées aux paragraphes 1 et 2 permettent de déterminer les caractéristiques modales d'une structure à partir d'un essai harmonique avec balayage en fréquence à force constante.

On admettra que les mesures de réponse sont effectuées en des points suffisamment nombreux et bien répartis pour que les vecteurs définissant la restriction à ces points des n formes propres intervenant dans la gamme de fréquence explorée soient indépendants. Cette condition implique que tous les degrés de liberté intervenant dans cette gamme de fréquence soient accessibles à la mesure.

3-1 Réduction du système

Soit M le nombre de points de mesure et N le nombre de points d'excitation. En supposant que les points d'excitation sont également points de mesure, on a $N \leq M$. En pratique, N est inférieur ou égal au nombre de degrés de liberté, n , et M est souvent beaucoup plus grand que n .

Soit $W_M(i\omega)$ la colonne de dimension M qui définit les déflexions aux points de mesure et F la colonne d'ordre N qui définit la répartition des forces d'excitation.

Les déflexions aux points d'excitation sont définies par une colonne W_N , de dimension N , déduite de W_M au moyen d'une matrice de permutation J :

$$W_N = J W_M \quad 3-1$$

Si, par exemple, il y a deux excitateurs, aux points d'indice 2 et 3, on a :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix}$$

Base modale, base artificielle

La restriction de chacune des formes propres aux points de mesure est définie par un vecteur ϕ_k , de dimension M , et l'ensemble de ces vecteurs forme une matrice Φ de dimension $M \times n$. On pose :

$$W_M(i\omega) = \Phi q(i\omega) \quad 3-2$$

Φ est la base modale qu'il faut déterminer.

Considérant, d'autre part, n fréquences ω_k voisines des fréquences de résonance ν_k , on peut mesurer, pour chacune de ces fréquences, le vecteur S_k qui définit la composante de la réponse en quadrature par rapport à l'excitation supposée équiréphasée.

Ces vecteurs, de dimension M , forment une matrice réelle S , de dimension $M \times n$, qui peut constituer une base de représentation des déflexions, au même titre que Φ . On a :

$$W_M(i\omega) = S X(i\omega) \quad 3-3$$

où X est une colonne de même dimension, n , que la colonne q .
 X est déterminé par la méthode des moindres carrés à partir des mesures de déflexion

$$X(i\omega) = [S^T S]^{-1} S^T W_M(i\omega) \quad 3-4$$

Les méthodes des paragraphes 1 et 2 peuvent être appliqués au vecteur $X(i\omega)$.

Changement de base.

Θ étant la matrice de changement de base reliant X et q par l'équation (I-3-I), $X = \Theta q$,

on déduit, d'après (3-2) et (3-3) :

$$\Phi = S \Theta \quad 3-5$$

Cette équation servira à déterminer Φ lorsqu'on connaîtra Θ .

Equation de la dynamique

L'équation de la dynamique peut être formulée par rapport aux variables du vecteur X ou par rapport aux coordonnées généralisées de la représentation modale, vecteur q .

Dans le premier cas on a :

$$[-\omega^2 M + i\omega B + K] X = E \quad 3-6-1$$

avec

$$E = S^T J^T F \quad 3-6-2$$

et dans le cas de la représentation modale :

$$[-\omega^2 \mu + i\omega \beta + \gamma] q = Q \quad 3-6-3$$

avec

$$Q = \Theta^T S^T J^T F \quad 3-6-4$$

3-2 Méthode de synthèse modale du paragraphe 1

Le vecteur $X(i\omega)$ étant déduit des mesures de déflexion par la formule (3-4), on peut appliquer la formule (1-2) et déterminer les produits matriciels $M^{-1}K$, $M^{-1}B$ et $M^{-1}E$. On calcule ensuite Θ et les produits matriciels $M^{-1}\beta$ et $M^{-1}\gamma$, par les formules (1-4-1) à (1-4-3), puis les masses généralisées μ_r par la formule (1-4-4). Enfin les formes propres de la structure qui constituent la base modale sont données par la formule (3-5).

3-3 Isolation des modes, méthode du paragraphe 2

Le vecteur $X(i\omega)$ étant connu, on cherche les solutions ξ_r , η_r , α_r , ν_r , de l'équation (2-17-1) en procédant par itération comme indiqué au paragraphe (2-1-2).

La matrice Θ est déterminée, à partir des vecteurs ξ_r et des pulsations propres ν_r , par la formule (2-19) :

$$\Theta = [\xi^T]^T [\nu]^{-1}$$

Les masses généralisées sont données par les formules (2-20) et (3-6-4) :

$$\mu_r = \frac{e^T \Theta^T S^T J^T F}{\nu_r^2} \quad 3-7$$

et les formes propres sont déterminées par (3-5) :

$$\phi = S \Theta$$

Les μ_r et les ϕ_r ainsi trouvés sont déterminés par la condition de normalisation (2-18). Il est facile, après coup de se ramener à une normalisation plus conventionnelle.

3-4 Excitation appropriée à un mode du système conservatif associé.

L'excitation est appropriée à un mode r du système conservatif associé si la colonne Q donnée par (3-6-4) est proportionnelle au vecteur e_r . Le vecteur F qui définit la répartition de force appropriée doit donc être une solution approchée, ou éventuellement exacte, de l'équation :

$$\Theta^T S^T J^T F = e_r c \quad 3-8-1$$

où C est une constante qui a la dimension d'un travail.

Le nombre de lignes du produit matriciel $\Theta^T S^T J^T$ est égal à n (nombre de degrés de liberté) et le nombre de colonnes à N (nombre de points d'excitation). Si $N < n$ on a la solution approchée :

$$F = [J S \Theta \Theta^T S^T J^T]^{-1} \Theta S J e_r c \quad 3-8-2$$

et si $N = n$ on a la solution exacte :

$$F = (\Theta^T S^T J^T)^{-1} e_r c \quad 3-8-3$$

Pour déterminer le coefficient C , il faut se donner une condition portant, par exemple, sur l'amplitude de la réponse.

L'appropriation de l'excitation ne peut être réalisée que lorsqu'on a déjà procédé à une première identification modale avec une excitation arbitraire. Sans être indispensable, elle permet de refaire dans de meilleures conditions l'identification des modes pour lesquels l'excitation arbitraire initiale pourrait se révéler très mal adaptée.

3-5 Résultats

Les figures (1) à (3) et le tableau (1) illustrent les résultats donnés par les méthodes des paragraphes (1) et (2) sur l'avion T B 20, monomoteur à aile droite de la Société SOCAT. Le nombre de points de mesure pris en considération dans cette application était égal à 20 ($M = 20$).

On montre ici les résultats obtenus à partir d'un balayage en fréquence avec excitation en haut de la dérive, dans la gamme de 10 à 20 MZ.

L'allure des courbes de résonance montre qu'il existe quatre modes dans cette gamme de fréquence et qu'il faut donc introduire quatre degrés de liberté dans les calculs ($n = 4$).

Les caractéristiques modales ont été déterminées par les méthodes des paragraphes (1) et (2). Le tableau (I) permet de comparer les fréquences, les amortissements et les masses généralisées donnés par les deux méthodes.

TABLEAU I

	FREQUENCE (HZ)		AMORTISSEMENT		MASSE GENERALISEE (m^2 kg)	
	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
Mode 1	11,76	11,77	0,020	0,028	25,62	16,99
Mode 2	14,31	14,33	0,029	0,030	17,91	15,09
Mode 3	15,59	15,59	0,008	0,012	172,7	152,4
Mode 4	17,49	17,49	0,038	0,041	12,56	10,93

La figure (2) montre la comparaison des courbes de résonance expérimentales et des courbes reconstituées par le calcul à partir des caractéristiques modales données par les deux méthodes. La position sur l'avion des points où sont effectués ces comparaisons est définie dans la figure (1).

Enfin la figure (3) est une représentation dans le plan complexe de la réponse d'un mode après isolation par la méthode du paragraphe (2). Elle représente, pour chacun des quatre modes, le premier et le second membre de l'équation (2-17-1) et permet donc d'apprécier la qualité de l'isolation modale donnée par la méthode.

La comparaison des balayages (figure 2) et des grandeurs généralisées (tableau I) paraît satisfaisante si l'on tient compte du fait que la structure essayée avait un comportement qui dénonçait la présence de non linéarités. La qualité des résultats est sensiblement la même pour les deux méthodes, et, dans ce cas, il semble que le choix des utilisateurs devrait s'orienter vers la méthode de synthèse modale qui est plus simple à mettre en oeuvre et plus rapide que la deuxième méthode. Toutefois, la séparation modale semble réserver des possibilités intéressantes pour les structures comportant de faibles non linéarités : elle peut faciliter l'analyse de ces non linéarités et il existe un espoir de pouvoir l'associer à un modèle de réponse comportant de faibles non linéarités.

CONCLUSION

Les deux méthodes présentées dans cet exposé permettent de déterminer les caractéristiques modales d'une structure à partir d'un essai harmonique avec une excitation qui n'a pas besoin d'être appropriée mais qui doit, évidemment, introduire suffisamment d'énergie dans les modes que l'on veut identifier.

A première vue, la méthode de synthèse modale paraît plus attrayante pour les applications pratiques parce qu'elle est plus simple à mettre en oeuvre que la méthode de séparation modale et donne des résultats de qualité sensiblement équivalente. Cependant, par son caractère analytique, qui résulte de l'isolation des modes, la deuxième méthode paraît plus apte à s'adapter aux structures présentant des faibles non linéarités.

REFERENCES

- (1) G. de Vries. Nouveaux procédés pour la détermination des valeurs caractéristiques dans l'essai de vibration - N.T. ONERA N° 82 (1965)
- (2) A. Deck. Contribution à l'étude d'une méthode semi-analytique d'appropriation N.T. ONERA N° 129 (1962).
- (3) C. Béatrix. La détermination expérimentale des caractéristiques vibratoires des structures N.T. ONERA 212 (1973).
- (4) D. Clerc. Sur l'appropriation des forces d'excitation lors des essais de vibration en régime harmonique. Recherche Aéronautique N° 87 (1962)

- (5) J.J. Angélini. Une nouvelle méthode de mesure des formes modales des structures aéronautiques. Xème Congrès ICAS, Ottawa 1976 - ICAS Paper N° 76-77 et T.P ONERA 1976-II7
- (6) G. Coupry. Nouvelle méthode d'identification des modes d'une structure - Recherche Aérospatiale N° 1980-5- I T.P ONERA 1980-146
- (7) R. Dat et J.L. Meurzec. Exploitation par lissage des mesures d'admittance d'un système linéaire. Recherche Aérospatiale 1972-4
- (8) R.Dat . Détermination de caractéristiques dynamiques d'une structure à partir d'un essai de vibration avec excitation ponctuelle. Recherche Aérospatiale 1973-5.
- (9) R. Dat. Modal representation and transfer functions of linear dissipation structures. VKI lecture series, Rhode Ste. Genèse 7.II Mai 1979 - T.P ONERA 1979-46
- (10) J. Briend. Modélisation d'une structure dynamique à partir d'essais harmoniques. Thèse de Docteur-Ingénieur. Faculté des Sciences et Techniques de l'Université de Franche Comté - 30 Octobre 1980.

ANNEXE A

PROJECTION ORTHOGONALE D'UNE FONCTION SUR UNE BASE COMPLEXE

La base \mathbf{Z}^T est la ligne des variables d'état $\mathbf{Z}_r(i\omega)$

Soit une fonction complexe $\mathbf{A}(i\omega)$. On cherche le vecteur \mathbf{C} qui rend minimum l'écart \mathcal{E} défini par :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{Z}^T \mathbf{C} - \mathbf{A}|^2 d\omega$$

ou

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\mathbf{C}} \mathbf{Z}^* - \mathbf{A}^*) (\mathbf{Z}^T \mathbf{C} - \mathbf{A}) d\omega$$

si \mathbf{C} est une solution, on a : $\delta \mathcal{E} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{C}$

$\delta \mathcal{E}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} &= \delta \bar{\mathbf{C}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}^* (\mathbf{Z}^T \mathbf{C} - \mathbf{A}) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\mathbf{C}} \mathbf{Z}^* - \mathbf{A}^*) \mathbf{Z}^T d\omega \delta \mathbf{C} \\ &= \delta \mathbf{C}^{*T} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^T \mathbf{C} - \mathbf{Z}^* \mathbf{A}) d\omega + \delta \mathbf{C}^T \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{Z} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{C} - \mathbf{Z} \mathbf{A}^*) d\omega \end{aligned}$$

La condition $\delta \mathcal{E} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{C}$

réel ou complexe entraîne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^T \mathbf{C} - \mathbf{Z}^* \mathbf{A}) d\omega = 0$$

d'où :

$$\mathbf{C} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^T d\omega \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}^* \mathbf{A} d\omega$$

a-1

Lorsque la colonne \mathbf{Z} définie par (I-3) est réelle, le vecteur d'état \mathbf{Z} donné par (I-4) à la propriété $\mathbf{Z}(-i\omega) = \mathbf{Z}^*(i\omega)$, d'où l'on déduit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^T d\omega = \int_0^{\infty} (\mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^T + \mathbf{Z} \mathbf{Z}^{*T}) d\omega$$

La matrice $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^T d\omega$ est donc réelle lorsque le vecteur excitation est réel.

VECTEURS PROPRES DU SYSTEME FAIBLEMENT DISSIPATIF

On se propose de déterminer les vecteurs v_r vérifiant l'équation :

$$v_r^T [p_r - A] = 0 \quad b-1$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^T \gamma & -\mu^T \beta \end{bmatrix} \quad b-2$$

où μ et γ sont des matrices diagonales et β matrice symétrique dont les coefficients peuvent être considérés comme infiniment petits du 1er ordre, alors que les coefficients de μ et de γ sont finis.

Considérons d'abord les solutions fondamentales $U_r e^{p_r t}$ du système d'équations du second ordre :

$$[p_r^2 \mu + p_r \beta + \gamma] U_r = 0 \quad b-3$$

Désignons par β_0 , la diagonale de β et considérons $\beta - \beta_0$ comme une perturbation du système diagonal. Celui-ci admet des solutions :

$$[p_{or}^2 \mu + p_{or} \beta_0 + \gamma] e_r = 0 \quad b-4$$

Avec la partie non diagonale de β les valeurs propres et les vecteurs propres deviennent respectivement :

$$p_r = p_{or} + \Delta_r \quad b-5-1$$

$$U_r = e_r + i \psi_r \quad b-5-2$$

Nous admettrons que le vecteur U_r est normé par la condition :

$$U_r^T U_r = 1 \quad b-5-3$$

qui est vérifiée par le vecteur initial e_r .

En reportant (b-5-1) et (b-5-2) dans (b-3) et en considérant $\beta - \beta_0$, Δ_r et ψ_r comme des infiniment petits du 1er ordre, on a :

$$\Delta_r (2p_{or} \mu + \beta_0) e_r + p_{or} (\beta - \beta_0) e_r + (p_{or}^2 \mu + p_{or} \beta_0 + \gamma) (i \psi_r) = 0 \quad b-6$$

En prémultipliant (b-6) par e_r^T il vient :

$$\Delta_r (2p_{or} e_r^T \mu e_r + e_r^T \beta e_r) + p_{or} e_r^T (\beta - \beta_0) e_r = 0$$

Mais $\beta - \beta_0$ ne contenant pas de terme diagonal, $e_r^T (\beta - \beta_0) e_r$ est nul. On en déduit que Δ_r est nul et que $p_r = p_{or}$ au second ordre près.

En prémultipliant (b-6) par e_k^T , $k \neq r$, et en remarquant que $e_k^T \mu e_r$ et $e_k^T \beta_0 e_r$ sont nuls puisque μ et β_0 sont diagonales, on a :

$$p_r e_k^T \beta e_r + e_k^T (p_r^2 \mu + p_r \beta_0 + \gamma) (i \psi_r) = 0$$

ou, puisque μ , β_0 et γ sont diagonales,

$$p_r e_k^T \beta e_r + e_k^T (p_r^2 \mu + p_r \beta_0 + \gamma) e_k e_k^T (i \psi_r) = 0$$

ou

$$e_k^T \psi_r, \text{ qui désigne le } k^{\text{ième}} \text{ élément du vecteur } \psi_r, \text{ est donné par :}$$

$$e_k^T \psi_r = - \frac{p_r \beta_{kr}}{i [p_r^2 \mu_{kk} + p_r \beta_{kk} + \gamma_{kk}]}$$

On a : $p_r = i \nu_r - \alpha_r \nu_r$ et l'hypothèse du système faiblement dissipatif conduit à considérer α_r comme infiniment petit du 1er ordre, de même que β_{kr} . Si, de plus, on admet que les pulsations propres sont suffisamment séparées pour que $\nu_r^2 - \nu_s^2$ soit fini $\forall s \neq r$ il vient :

$$e_k^T \psi_r = - \frac{\gamma_r \beta_{kr}}{\mu_k (\gamma_k^2 - \gamma_r^2)}, \quad k \neq r$$

où μ_k désigne le terme μ_{kk} de la matrice diagonale μ ($\mu_k = e_k^T \mu e_k$)

Le coefficient $e_r^T \psi_r$ peut être déduit de la condition de normalisation (b-5-3). On a :

$$\begin{aligned} U_r^T U_r &= (e_r^T + i \psi_r^T)(e_r + i \psi_r) \\ &= 1 + i(\psi_r^T e_r + e_r^T \psi_r) \\ &= 1 \quad \text{d'après (b-5-3)} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$e_r^T \psi_r = 0$$

En désignant par ψ la matrice des vecteurs ψ_r , on a donc finalement :

$$U = e_r + i \psi e_r$$

avec :

$$e_k^T \psi e_r = \begin{cases} - \frac{\gamma_r \beta_{kr}}{\mu_k (\gamma_k^2 - \gamma_r^2)}, & k \neq r \\ 0 & k = r \end{cases} \quad \text{b-8}$$

En transposant (b-3) on voit, compte tenu de la symétrie des matrices μ, β et γ , que U_r vérifie l'équation :

$$U_r^T (p_r^2 \mu + p_r \beta + \gamma) = 0$$

On en déduit que le vecteur donné par :

$$V_r = \begin{pmatrix} \gamma U_r \\ -p_r \mu U_r \end{pmatrix}$$

vérifie l'équation (b-1) et constitue donc le vecteur propre à gauche cherché. On a donc :

$$V_r = \begin{pmatrix} \gamma [1 + i \psi] e_r \\ -p_r \mu [1 + i \psi] e_r \end{pmatrix} \quad \text{b-9-1}$$

où ψ est la matrice définie par :

$$e_k^T \psi e_r = \begin{cases} - \frac{\gamma_r \beta_{kr}}{\mu_k (\gamma_k^2 - \gamma_r^2)}, & k \neq r \\ 0 & k = r \end{cases} \quad \text{b-9-2}$$

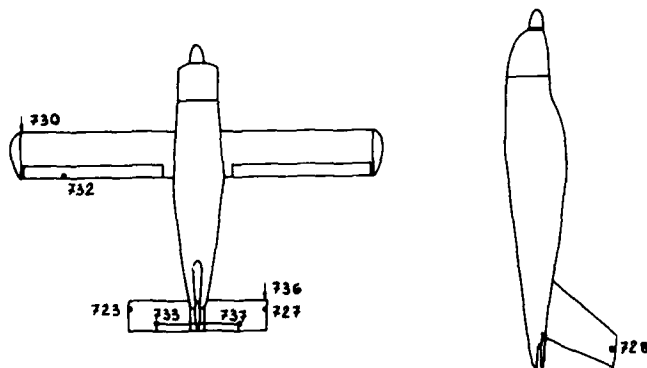
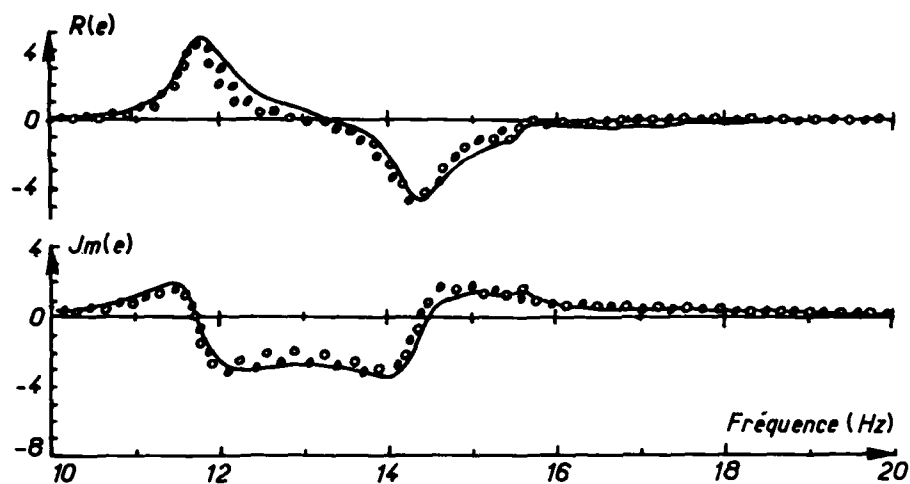
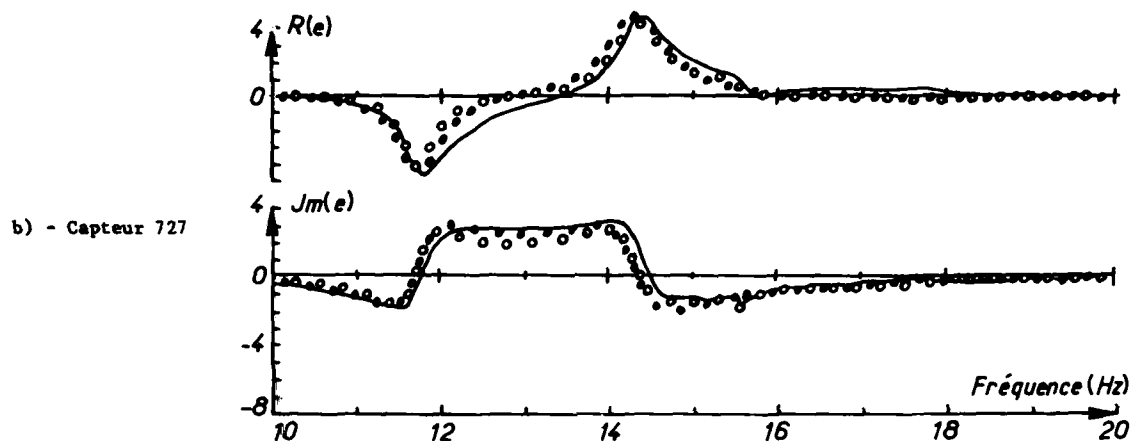


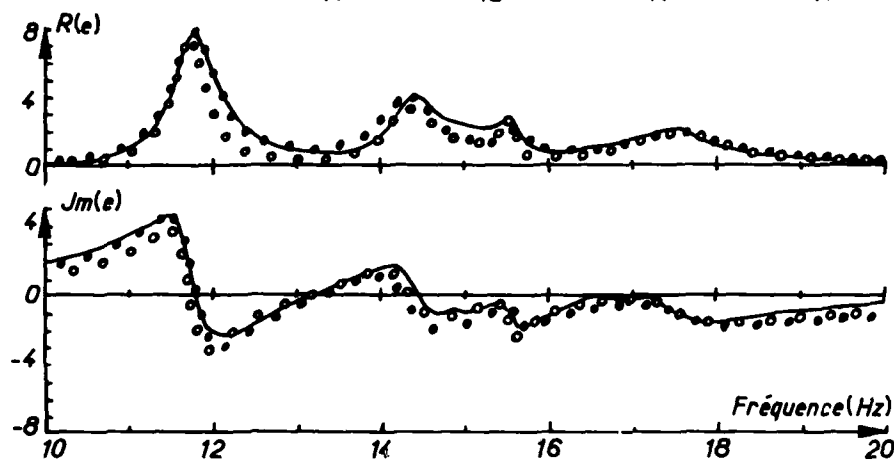
Fig.1 - Avion TB 20. Position des points de mesure et du point d'excitation



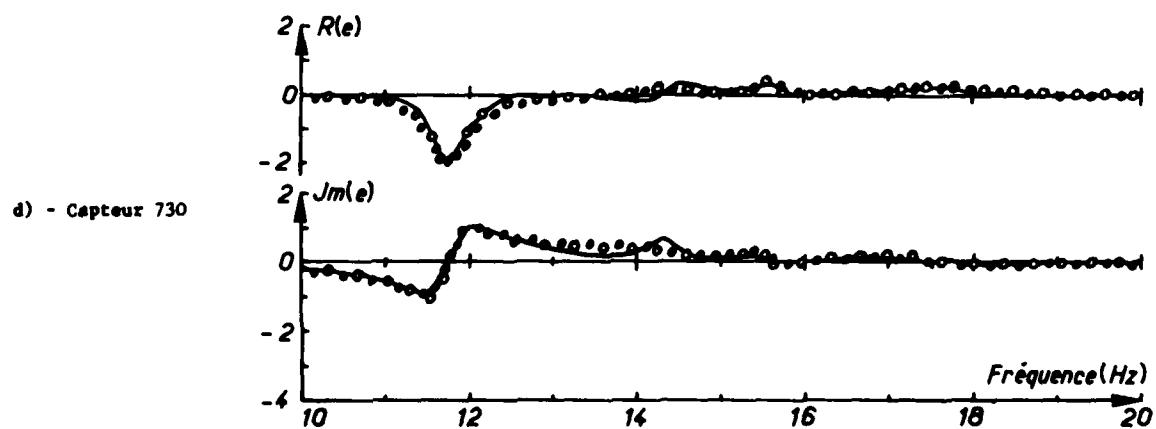
a) - Capteur 723



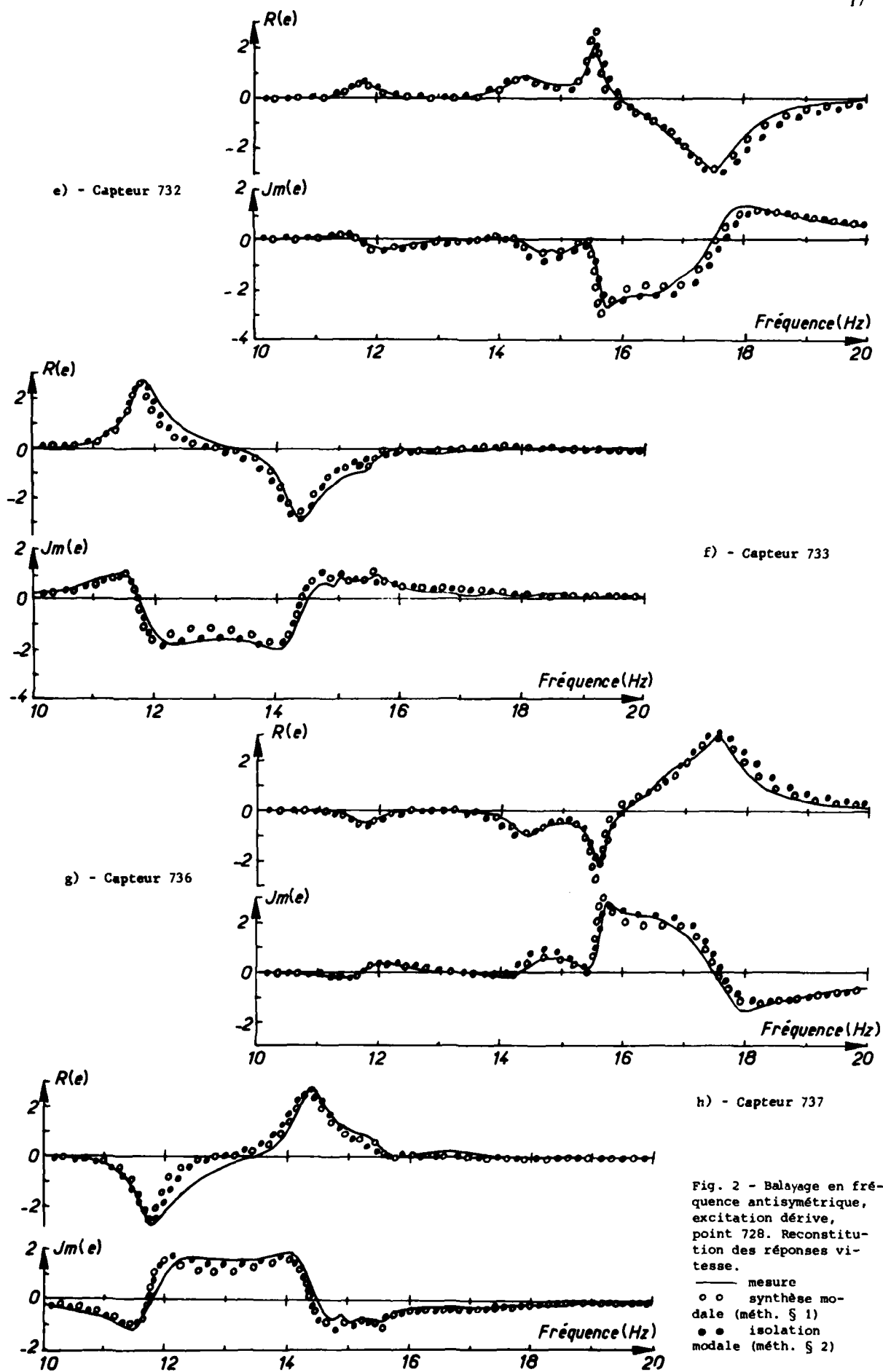
b) - Capteur 727

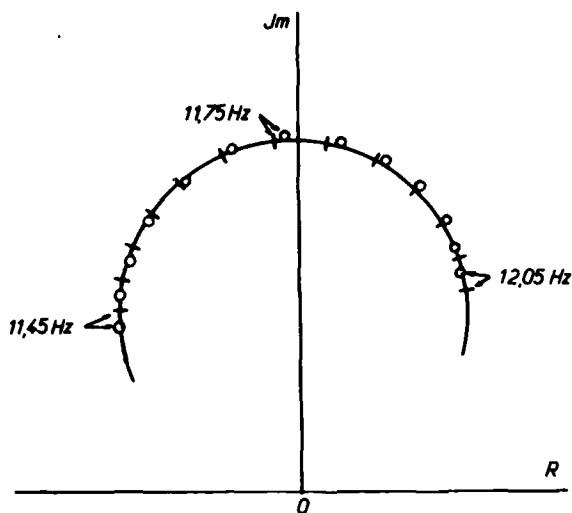


c) - Capteur 728

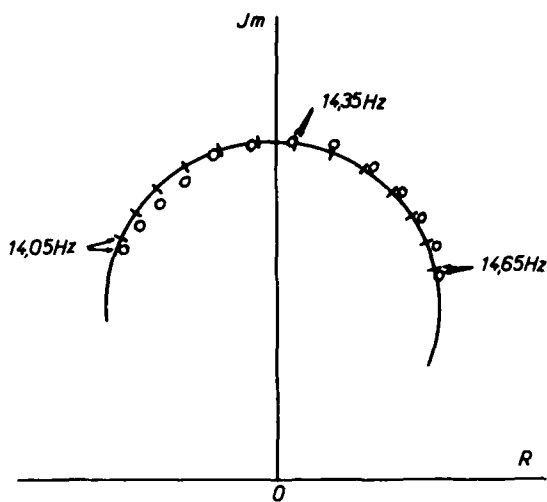


d) - Capteur 730

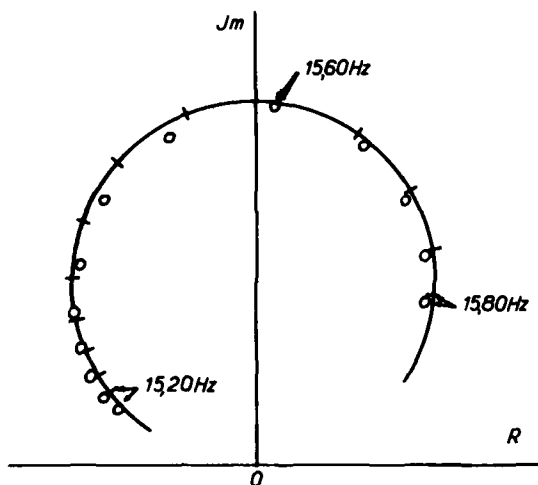




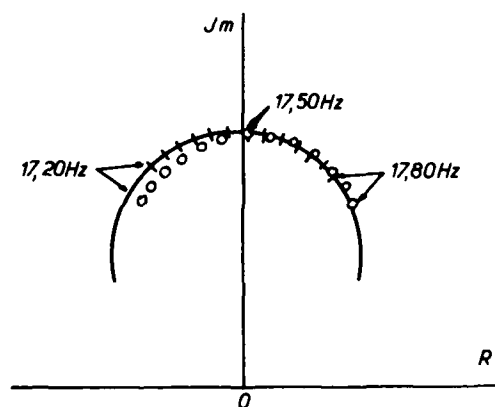
a)- Mode 1 : Coplanaire AS aile avec participation empennages
 $f_r = 11,77 \text{ Hz}$, $\alpha = 0,028$



b)- Mode 2 : Flexion 1 noeud d'empennage horizontal
 $f_r = 14,33 \text{ Hz}$, $\alpha = 0,030$



c)- Mode 3 : Vibration masses d'équilibrage avec participation empennage horizontal
 $f_r = 15,59 \text{ Hz}$, $\alpha = 0,012$



d)- Mode 4 : Coplanaire empennage horizontal
 $f_r = 17,49 \text{ Hz}$, $\alpha = 0,041$

Fig.3 - Isolation modale. Représentation dans le plan complexe de la réponse des modes isolés.

Réponse modale expérimentale $(X(i\omega)) \left[\frac{\xi}{\xi + i\omega\eta} \right]$ + + Lissage $\frac{a}{\sqrt{r^2 - \omega^2 + 2i\alpha_r \sqrt{r} \omega}}$

Nonlinear Aeroelastic Analyses Taking into Account
Active Control Systems

by

R. Freymann*)

DFVLR - AVA Goettingen
Institute of Aeroelasticity
Bunsenstr.10, 3400 Goettingen, Germany

Summary

Analytical investigations on aircraft with active control systems can be performed on the basis of an extended formulation of the generalized aeroelastic equations. Besides the structural modal parameters needed for these investigations which can be determined in a ground vibration test on the real aircraft structure, a comprehensive knowledge of the partially nonlinear transfer functions of the different elements of the control loops is necessary. For this purpose a method is presented which shows the determination of the transfer functions of these elements in a ground vibration test on the real aircraft and in special tests on the aircraft hydraulic actuation systems. In order to demonstrate the validity of the elaborated procedure, dynamic response calculations based upon the proposed extended formulation of the aeroelastic equations, which take into account both the results of the ground vibration test as well as of the actuator tests, are performed on a model wing structure with a hydraulically driven rudder. Results of these analytical investigations are compared to measured data on the same model structure.

1. Introduction

In recent years a tendency to install increasingly complex control systems in modern aircraft can be observed, see Ref.[1]. These control systems can greatly affect the dynamic behavior of the aircraft. Especially the integration of active control systems operating in the higher frequency range such as active flutter suppression or gust alleviation systems (see Refs.[2,3,4]), which are introduced into modern aircraft design in order to provoke a desired change of the aircraft's dynamic behavior, requires detailed investigations for determination of structural and control system coupling effects. Attempting to consider the dynamic properties of the active control system in the aeroelastic qualification of the aircraft reveals some problems and requires solutions of the following questions:

- a) What possibilities are given to describe analytically the equations of motion of an aircraft with active control systems - which is indeed a nonconservative system - in a generalized form, say by means of its eigenmodes as elastomechanic degrees of freedom?
- b) How must the ground vibration test be performed on the aircraft in order to determine its modal parameters, such as eigenfrequencies, eigenmodes, generalized masses and generalized damping coefficients?
- c) In what way must the dynamic characteristics of the hydraulic actuators and control system feedback loops be determined and introduced into the generalized equations of motion, such that the dynamic behavior of servo systems can be fully considered in aeroelastic analyses?

Neither these questions nor consequential problems may be regarded separately when seeking an answer. For aeroelastic investigations it is of great importance to find one consistent approach which gives a satisfactory answer to all three points mentioned above. In Refs.[5,6,7,8] several possible approaches are discussed. Unfortunately in these reports some of the key problems such as the determination of transfer functions of the actuators or the performance of ground vibration tests are not treated in enough detail or in a practical way. Furthermore most of these approaches are based on the more or less incorrect assumption of linear behavior of the aircraft with control systems.

This report describes a consistent and practical new method which can be applied successfully to the aeroelastic qualification of aircraft with active control systems. First, in Section 2.1, an experimental-analytical method to determine the frequency responses of the actuator transfer functions is discussed, taking into account both nonlinear and preload effects. In Section 2.2 a description of a ground vibration test procedure is given for determination of the modal aircraft parameters as well as structural and electric feedback effects due to the control system and the servomechanisms. Finally, it is shown in Section 2.3 how the measured data resulting from the actuator tests (frequency responses) and from the ground vibration test (modal parameters, control system feedback properties) are introduced into the generalized equations of motion in order to allow the performance of aeroelastic qualification analyses on aircraft with active control systems.

The aim of this report is to present a survey of such procedural advances. Further details can be taken from Ref.[9].

*) Member of the Structures and Materials Panel delegated by the "Ministère de la Force Publique" of the Grand-Duchy of Luxembourg.

2. Description of the method

Two of the major problems encountered when performing aeroelastic analyses on aircraft with active control systems must be attributed to the fact that such aircraft can be regarded neither as a linear nor as a conservative system. Due to these nonlinear and non-conservative properties, the limits of validity of numerous theoretical approaches and practical procedures commonly used for the dynamic qualification of aircraft are greatly exceeded.

The nonconservative as well as significant (locally concentrated) nonlinear properties of aircraft with active control systems must be attributed to the actuators. In order to allow the utilization of conventional ground vibration test procedures, it would be advantageous to replace the (active) actuators by (passive) dummy actuators during the performance of the ground vibration test. This procedure requires that a possibility exists for determination of the actuator transfer functions which must be considered in the aeroelastic analysis later performed on the basis of the modal parameters measured during the ground vibration test on the modified (passive) aircraft.

To satisfy this requirement, a description of a new method for determination of the nonlinear and preload-dependent frequency responses of the actuator transfer functions is given in the following section.

2.1 An experimental-analytical method for determination of the frequency responses of the transfer functions of hydraulic actuators

Numerous tests performed on actuators (see Refs. [10,11,12,13]) have shown that servocylinders can possess highly nonlinear, complex, frequency- and preload-dependent properties. A further difficulty is caused by the fact that actuators must be regarded as multivariable systems with two input signals and one output signal. The input signals are the servo valve spool displacement and the actuator force; the output signal is the actuator elongation.

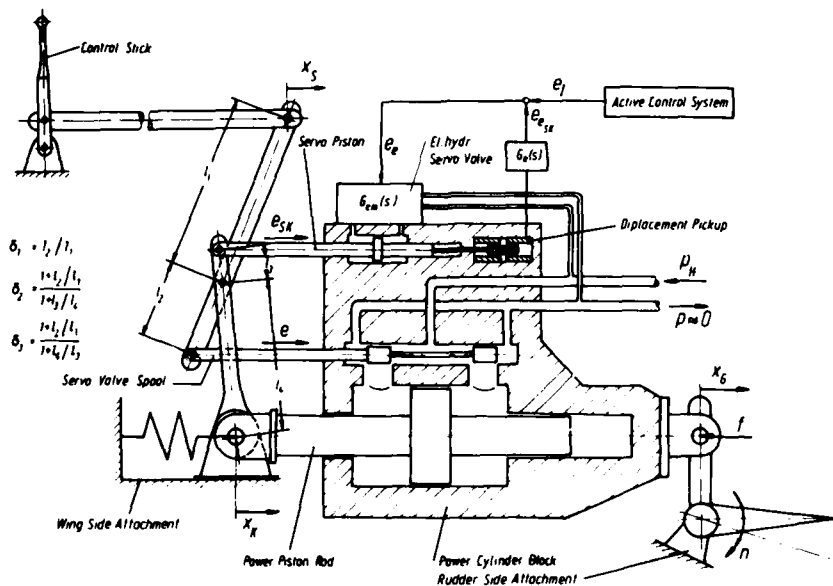


Fig.1: Rudder/wing connection with hydraulic actuator.

The elaborated method for determination of the frequency responses of the actuator transfer functions will be applied here taking the example of an actuator controlled by a mechanical as well as by an electric input signal (Fig.1). Detailed analytical investigations described in Ref. [9] have yielded that the equations of motion of an actuator can be formulated (in the frequency domain) either by the force equation

$$(1) \quad f = FE(s)e' + FX(s)(x_G - x_K) \quad ,$$

or by means of the displacement equation

$$(2) \quad x_G - x_K = XE(s)e' + XF(s)f \quad ,$$

when making use of the following notations (Gothic letters refer to Laplace transformed variables):

x_G, x_K : displacement of the power cylinder block and of the power piston rod, respectively,
 f : actuator force,

e' : relative displacement of the servo valve spool defined as

$$(3) \quad e' = e - x_G$$

$s = \sigma + i\omega$: Laplace variable,

$FE(s)$: transfer function relating the servo valve spool displacement to the actuator force,

$FX(s)$: transfer function relating the actuator elongation to the actuator force (actuator admittance),

$XE(s)$: transfer function relating the servo valve spool displacement to the actuator elongation,

$XF(s)$: transfer function relating the actuator force to the actuator elongation (actuator impedance).

Between the actuator impedance and admittance transfer functions exists the following relation:

$$(4) \quad XF(s) = (FX(s))^{-1}.$$

Eqs. (1) and (2) are valid if the mass forces of some actuator components (piston, piston rod, power cylinder block) are neglected. The transfer functions of these equations are assumed to have amplitude- and preload-dependent properties. It could be shown that if the nonlinear parameters (flow, leakage, damping coefficients) included in these transfer functions are considered on the basis of the "harmonic balance" procedure (see Ref. [14]) - thus allowing the performance of a nonlinear analysis - then the following relationship exists between the frequency responses of the transfer functions $XE(s)$, $FE(s)$ and $FX(s)$:

$$(5) \quad XE(i\omega_0, e'_0) = -FE(i\omega_0, e'_0, f_0) \cdot (FX(i\omega_0, f_0))^{-1}.$$

Performing this multiplication of frequency responses at discrete circular frequencies ω_0 requires an exact consideration of the amplitude levels of e'_0 and f_0 .

If the cylinder mass forces are introduced into the mathematical model, the forces acting on the power cylinder block and on the power piston rod, designated by f_G and f_K , respectively, are no longer equal. Eqs. (1) and (2) can then be written as follows:

$$(6a) \quad f_K = F_K E(s) e' + F_K X_K(s) x_K + F_K X_G(s) x_G,$$

$$(6b) \quad f_G = F_G E(s) e' + F_G X_K(s) x_K + F_G X_G(s) x_G,$$

and

$$(7) \quad x_G - x_K = XE(s) \cdot e' + X_G F_G(s) \cdot f_G + X_G F_K(s) \cdot m_G s^2 \cdot x_K.$$

Denoting the mass of the power cylinder rod (with the piston) by m_K and the mass of the power cylinder block by m_G , it can be shown that with

$$(8) \quad X_G F_G(s) = (F_G X_G(s))^{-1}$$

the following relations exist between the transfer functions of Eqs. (6) and (7) and those of Eqs. (1) and (2):

$$(9a) \quad F_K E(s) = F_G E(s) = FE(s),$$

$$(9b) \quad F_K X_G(s) = FX(s),$$

$$(9c) \quad F_G X_K(s) = -FX(s),$$

$$(9d) \quad F_K X_K(s) = -FX(s) + m_K \cdot s^2,$$

$$(9e) \quad F_G X_G(s) = FX(s) - m_G \cdot s^2.$$

Considering the mass forces, Eq. (5) can also be rewritten as follows:

$$(10) \quad XE(i\omega_0, e'_0) = F_G E(i\omega_0, e'_0, f_0) \cdot (F_G X_K(i\omega_0, f_0))^{-1}.$$

Eqs. (7) and (8) can be regarded as the equations of motion of a "free-free" supported actuator. In the case of the actuator drawn in Fig. 1 the following relation can be written for the relative displacement e' of the servo valve spool if kinematics of the control rods and a flexibility at the power piston rod bearing are considered:

$$(11) \quad e' = -\delta_1 x_S + \delta_2 e_{SK} + \delta_3 x_K - x_G.$$

with

x_S : displacement of the control stick rod,

e_{SK} : displacement of the servo piston,

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$: lever arm rate of the control rods as defined in Fig. 1.

Denoting the nonlinear transfer function of the amplifier unit comprising the electrohydraulic servo valve and the servo piston (without regarding the servo piston displacement

feedback loop), the servo piston displacement e_{SK} can be related to the electric input signal e_e of the electrohydraulic servo valve as follows:

$$(12) \quad e_{SK} = G_{em}(s) e_e,$$

with

$$(13) \quad e_e = e_I + e_{eSK}$$

and

$$(14) \quad e_{eSK} = G_e(s) (e_{SK} - x_G).$$

Thereby the following notations were used:

- e_I : electric servo valve input signal induced by the active control system,
 e_{eSK} : electric servo valve input signal induced by the servo piston feedback loop,
 $G_e(s)$: transfer function of the servo piston displacement feedback loop.

Introducing Eqs. (12,13,14) into Eq. (11) yields:

$$(15) \quad e' = G_{em}^R(s) e_I + e_m + e_f - (1 + G_{em}^R(s) G_e(s)) \cdot x_G,$$

with

$$(16) \quad G_{em}^R(s) = \delta_2 \frac{G_{em}(s)}{1 - G_{em}(s) G_e(s)}$$

as the transfer function of the amplifier unit consisting of the electrohydraulic servo valve and the servo piston cylinder, taking into account the servo piston feedback loop. The servo valve spool inputs e_m and e_f due to the displacement of the control stick rod and to the flexibility of the power piston rod bearing are defined in accordance with Eq. (11) as follows:

$$(17) \quad e_m = -\delta_1 x_S,$$

and

$$(18) \quad e_f = \delta_3 x_K.$$

Introducing Eq. (15) into Eqs. (6) and (7) yields the equations of motion of the most complicated actuator type controlled by a mechanical as well as by an electric input signal. Because the displacement equation of motion is of primary importance for the aeroelastic analysis later performed in Section 2.3, this equation is rewritten here in its entirety yielding:

$$(19) \quad x_G - x_K = XE(s) \left\{ G_{em}^R(s) e_I + e_m + e_f - (1 + G_{em}^R(s) \cdot G_e(s)) \cdot x_G \right\} + X_{GF}(s) \cdot f_G + X_{GG}(s) \cdot m_G s^2 \cdot x_K.$$

Having obtained this equation from analytical investigations, the next problem to be solved is how to determine the frequency responses of the transfer functions $XE(s)$, $X_{GF}(s)$, $G_{em}^R(s)$ and $G_e(s)$. These frequency responses can hardly be determined analytically because it is very difficult to give an accurate evaluation of some actuator parameters such as the servo valve flow, various pressure gradients or leakage coefficients for the dynamic operation of the actuator. It could be shown (see Ref. [15]) that these parameters are extensively frequency-dependent and exhibit nonlinear properties. Thus the frequency responses of the various transfer functions must be determined experimentally in order to obtain reliable results. With the exception of the frequency responses $G_{em}^R(i\omega)$ and $G_e(i\omega)$ which can be determined easily by a test, it would be very cumbersome to measure the (preload-dependent) frequency response $XE(i\omega)$ directly in a test.

The key idea of the method proposed here is that frequency responses of transfer functions which cannot easily be determined directly in a test are calculated from frequency responses of other transfer functions the experimental determination of which is quite simple. A description of this method to determine the frequency responses of the transfer functions listed in Eq. (19) can be summarized as follows:

- Measurement of the frequency response $F_{GX_K}(i\omega)$, (Sec. 2.1.1),
- Measurement of the frequency response $F_{GE}(i\omega)$, (Sec. 2.1.2),
- Measurement of the frequency responses $G_{em}^R(i\omega)$ and $G_e(i\omega)$, (Sec. 2.1.3),
- Calculation of the frequency response $F_{GX_G}(i\omega)$ on the basis of the measured frequency response $F_{GX_K}(i\omega)$ according to Eqs. (9c) and (9e).
 Calculation of the frequency response $XE(i\omega)$ on the basis of the measured frequency responses $F_{GE}(i\omega)$ and $F_{GX_K}(i\omega)$ according to Eq. (10).

A detailed description of the performance of the various actuator tests will be given in the following sections. Because all transfer functions (except $G_e(s)$) are dependent on the static actuator preload force, these tests are performed at the various levels of the preload force of interest. Multiplication of frequency responses - as required by Eq. (10) - is consistent only if all frequency responses are attributed to the same preload. Similarly two other working-point parameters have to be considered. Firstly, the frequency responses are dependent on the static elongation of the actuator (static position of the

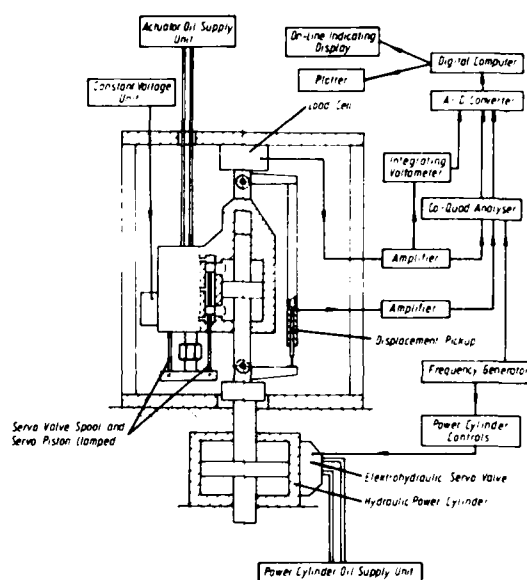
power piston in the cylinder block). Secondly, since the bulk modulus of the oil is influenced by temperature changes, frequency responses will also be influenced by changes of oil temperature. In order to avoid the influence of the latter working-point parameters, all following tests will be performed at a nearly constant oil temperature and at a given static actuator elongation.

2.1.1 Experimental determination of the frequency response of the transfer function $F_G X_K(s)$

The actuator mounted in the test rig shown in Figs.2 and 3 is excited at its piston rod by a power cylinder. The excitation is realized at various frequencies and amplitudes of the exciting force. During these investigations, the servo valve spool is clamped to the actuator power cylinder block ($e'=0$) in such a position to maintain a desired static preload force F . For a given harmonic excitation of the actuator power piston rod, the force f_G (measured by means of a load cell fixed at the actuator power cylinder block) and the relative displacement $x_G - x_K$ between the supporting points of the actuator (measured by means of a displacement pickup) are determined. With the help of co-quadrant analysers the first harmonic oscillations are filtered out of the measured periodic signals. Simultaneously the amplitude and the phase lag (relative to the harmonic output signal of the frequency generator) of the respective first harmonic oscillation signals are determined.



Figs.2 and 3: Test setup for determination of the frequency response $F_G X_K(i\omega)$.



Assuming that the dynamic displacement of the actuator power cylinder block is very small ($x_G \approx 0$), Eq.(6b) yields for a given circular frequency ω_0 and for a given force amplitude $f_G = f_0$ with regard to $x_G = 0$ and $e' = 0$:

$$(20) \quad F_G X_K(i\omega_0, f_0) = f_G / x_K$$

Therewith a point-by-point determination of the nonlinear frequency response curves $F_G X_K(i\omega)$ is possible. Consequently a plot of measured frequency response curves is shown in Fig.4 (dotted letters mark effective values). In Fig.5 the preload dependency of the same actuator is plotted for a constant frequency.

2.1.2 Experimental determination of the frequency response of the transfer function $F_G E(s)$

The actuator is mounted "rigidly" in the test rig shown in Figs.6 and 7. During the performance of the test, the servo piston is clamped to the actuator power cylinder block ($e_{SK} - x_G = 0$). Using an (electrodynamical) exciter, the control rod is harmonically excited at various displacement amplitudes and frequencies. For a given excitation the relative displacement e' of the servo valve spool (by means of a displacement pickup) as well as the actuator force f_G (by means of a load cell) are measured.

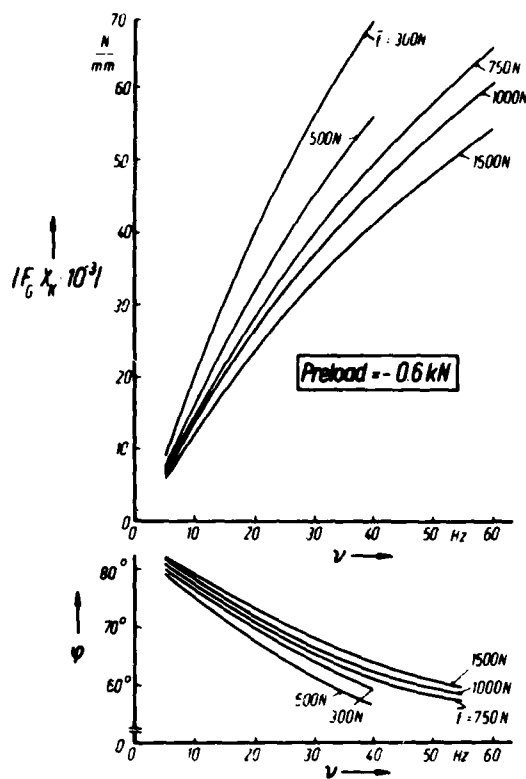


Fig. 4: Frequency response plot of the transfer function $F_G X_K(s)$ (ASIS Actuator).

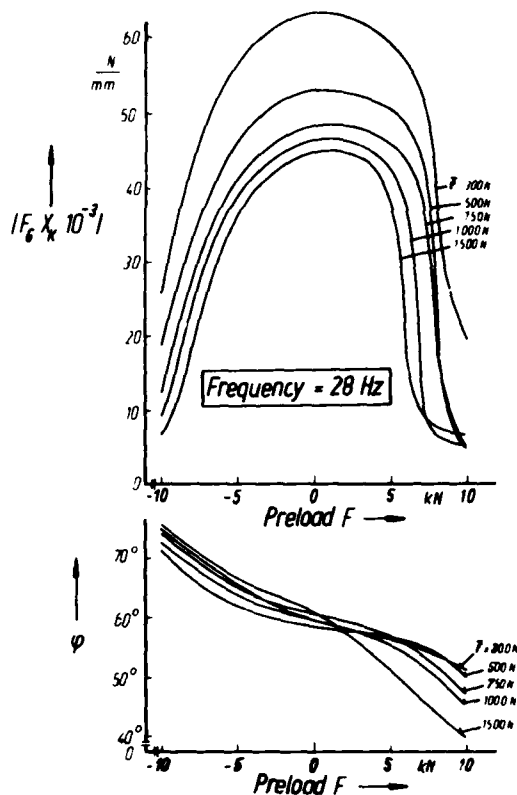
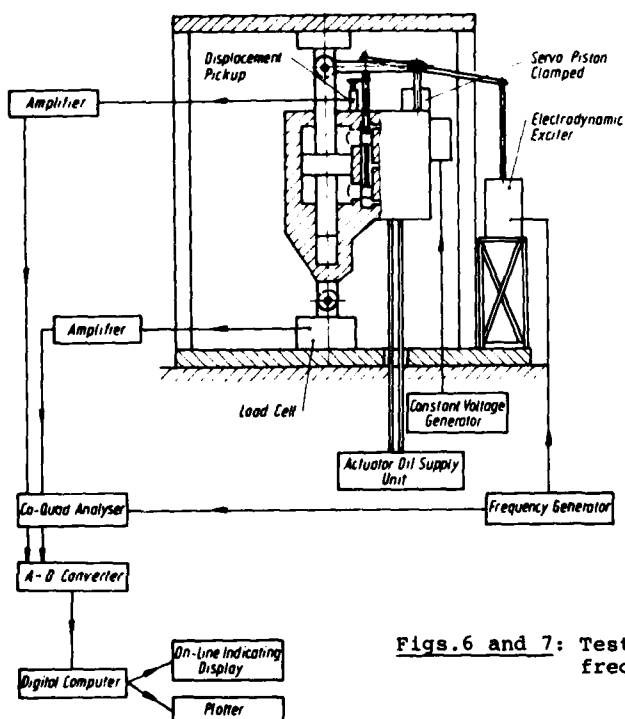
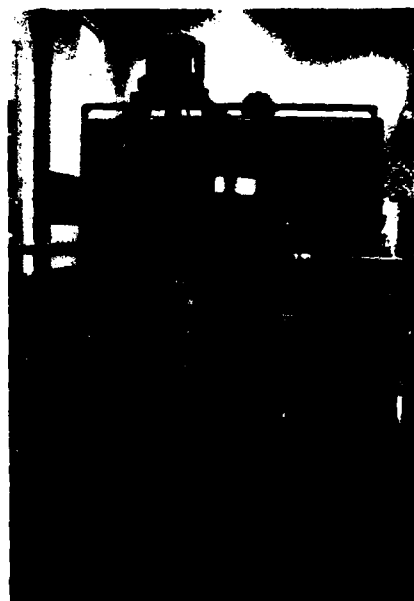


Fig. 5: Preload dependence of the transfer function $F_G X_K(s)$ (ASIS Actuator).



Figs. 6 and 7: Test setup for determination of the frequency response $F_{GE}(i\omega)$.



Neglecting the flexibilities of the test rig ($x_G = x_K = 0$), Eq.(6b) yields for a given circular frequency ω_0 and for a given exciting amplitude $e' = e_m = e_0'$ with respect to $x_G = x_K = 0$ and $e_I = 0$:

$$(21) \quad F_G E(i\omega_0, e_0') = f_G / e'$$

Consequently Fig.8 shows the frequency response plot of the transfer function $F_G E(s)$ measured on an F-4F high gain aileron actuator.

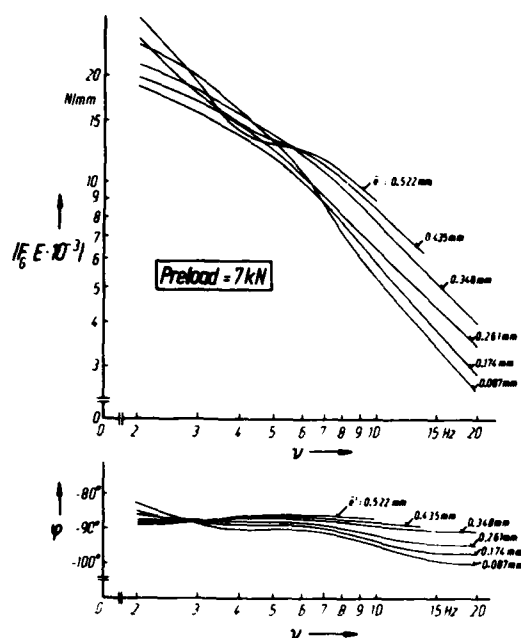


Fig.8: Frequency response plot of the transfer function $F_G E(s)$ (F-4F aileron actuator).

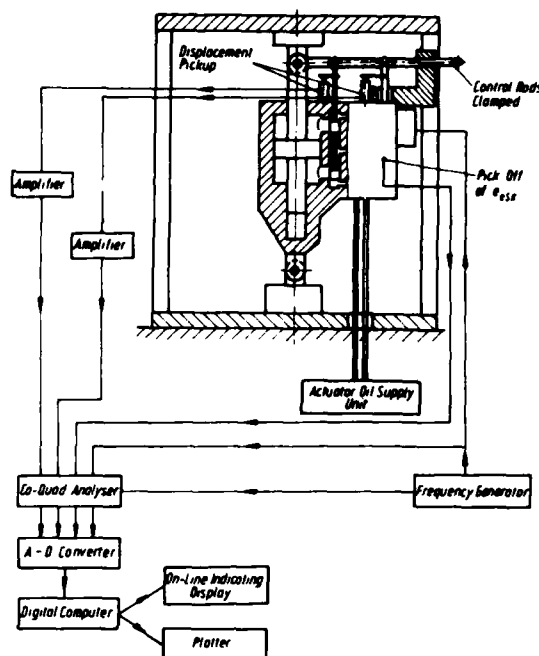


Fig.9: Test setup for determination of the frequency responses $G_{em}^R(i\omega)$ and $G_e(i\omega)$.

2.1.3 Experimental determination of the frequency responses of the transfer functions $G_{em}^R(s)$ and $G_e(s)$

While performing this test, the actuator remains in the test rig shown in Figs.6 and 7. During the test the control rod is clamped to the actuator power cylinder block ($e_m = 0$). The electrohydraulic servo valve is then harmonically excited at various frequencies and at various amplitudes of the input voltage e_I (see Fig.9). For a given excitation e_I , the relative displacement e' of the servo valve spool, the relative displacement ($e_{SK} - x_G$) of the servo piston as well as the electric signal e_{eSK} induced by the servo piston displacement feedback loop are measured. For a given circular frequency ω_0 and a given amplitude of the input voltage $e_I = e_{I0}$, Eq.(15) yields with $e_m = 0$, $e_f = 0$ and $x_G = 0$:

$$(22) \quad G_{em}^R(i\omega_0, e_{I0}) = e' / e_I$$

Furthermore with the assumption of a linear transfer behavior of the servo piston displacement feedback loop, Eq.(14) yields:

$$(23) \quad G_e(i\omega_0) = e_{eSK} / (e_{SK} - x_G)$$

Having terminated the tests described in Sections 2.1.1, 2.1.2 and 2.1.3, all data are available to calculate the frequency responses of the transfer functions of the actuator displacement equation of motion (Eq.(19)).

It must be emphasized that all these investigations on actuators were carried out with the intention to replace the active actuators by passive dummy actuators during the performance of the ground vibration test on the real aircraft structure. The requirement formulated at the beginning of Chapter 2, which stated that the replacement of the actuators by dummy actuators - leading to a modification of the aircraft - is practicable only if determination of the actuator transfer functions is possible, is now satisfied. Finally it should be mentioned that actuator tests as described in Sections 2.1.1 through 2.1.3 could hardly be performed with such accuracy and at such high preload and dynamic exciting force levels

in a ground vibration test on the aircraft equipped with the actuators. Having solved the actuator problem, attention can now be focussed on the ground vibration test procedure.

2.2 Performance of the ground vibration test on aircraft with active control systems

For the performance of aeroelastic analyses on the basis of modal data it is necessary that the eigenmodes fulfill the orthogonality condition. Practically speaking, determination of orthogonal eigenmodes in the ground vibration test is possible only if the structure has conservative and nearly linear properties.

Dealing with structural nonlinearities, a distinction must be made between the continuously distributed (global) structural nonlinearities, the origin of which is located in the riveted, screwed or bolted connections, and the locally concentrated nonlinearities due to components with nonlinear properties such as actuators or partially filled external store tanks. In Ref.[16] it is shown that weak global nonlinearities are of primary importance only when dealing with neighboring eigenfrequencies. Locally concentrated nonlinearities located in the rudder/wing connections or in external store systems can be eliminated in the ground vibration test by replacing the nonlinear elements (actuators, stores) by dummy components. A subsequent consideration of the true nonlinear behavior of the replaced components in the generalized equations of motion is possible by adding modification terms in these equations (see Refs.[17,18,19]).

The consequence of replacing the active actuators with passive dummy actuators having linear stiffness characteristics is that such modified aircraft can be regarded as an elastomechanical structure with quasi-linear and conservative properties. This fact allows application of conventional methods for the performance of the ground vibration test.

2.2.1 Determination of the dynamic properties of the rudder rigid body degrees of freedom

Since the aeroelastic analyses are performed later in Section 2.3 on the basis of quasi-normal coordinates (see Ref.[20]), characterized by the fact that rudder rigid body modes and global aircraft eigenmodes are considered separately in the generalized equations of motion, it is advantageous to determine the modal parameters of global aircraft eigenmodes and rudder rigid body modes in separate tests as well.

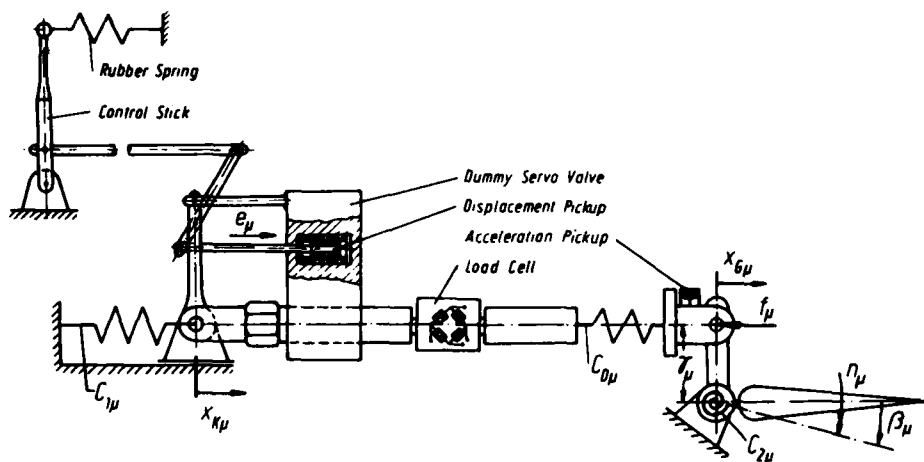


Fig.10: Rudder/wing connection with dummy actuator.

Before the performance of the ground vibration test, the hydraulic actuators are replaced by dummy actuators (Fig.10). Since Eq.(19) requires the mechanical servo input signals e_m and e_f and the electric signal e_i to be determined, a displacement pickup (located in the dummy servo valve) and a load cell measuring the actuator force are fitted in the dummy actuator. The measurement of the electric input signal e_i can be achieved with the help of a voltmeter. Furthermore for determination of the actuator attachment stiffnesses, an acceleration pickup is placed on the dummy actuator rudder bearing.

Before mounting the various dummy actuators in the respective rudder/wing connections, their stiffness characteristics are determined in preliminary tension tests. The stiffnesses of the dummy actuators are chosen such that the eigenfrequencies of the rudder rigid body modes do not fall into the (immediate) frequency range of a global aircraft eigenmode. To satisfy this condition, results of previously performed (finite element) calculations have to be considered.

The connecting parts of the dummy actuators have to be constructed within the same manufacturing tolerances as for the original actuators. If the original connecting parts are fixed by screw connections on the original actuators, it will be possible in most cases

to use these original fittings for the fixation of the dummy actuators. Also the original connection parts such as bolts or lugs will be used when mounting the dummy actuators in the rudder/wing connections.

Moreover the freedom of movement of the steering mechanisms (control stick, foot pedals) is reduced by attaching these mechanisms to the airframe with (rubber) cords. Thus undesirable movement of the control stick and foot pedal due to friction effects in the bearings of the steering mechanism rods can be avoided when the aircraft is excited.

While performing the ground vibration test, the dynamic properties of the rudder rigid body degrees of freedom are determined one after another. Thereby the μ -th rudder ($\mu=1,2,\dots,m$) is excited in its eigenfrequency by a (generalized) force R_μ . Considering the notation used in the mathematical model of Fig.10 as well as the block diagram of Fig.11 yields:

$$(24) \quad R_\mu = n_\mu \cdot \delta_\mu,$$

with

R_μ : generalized external rudder exciting force,

n_μ : rudder hinge moment,

δ_μ : rudder hinge angle.

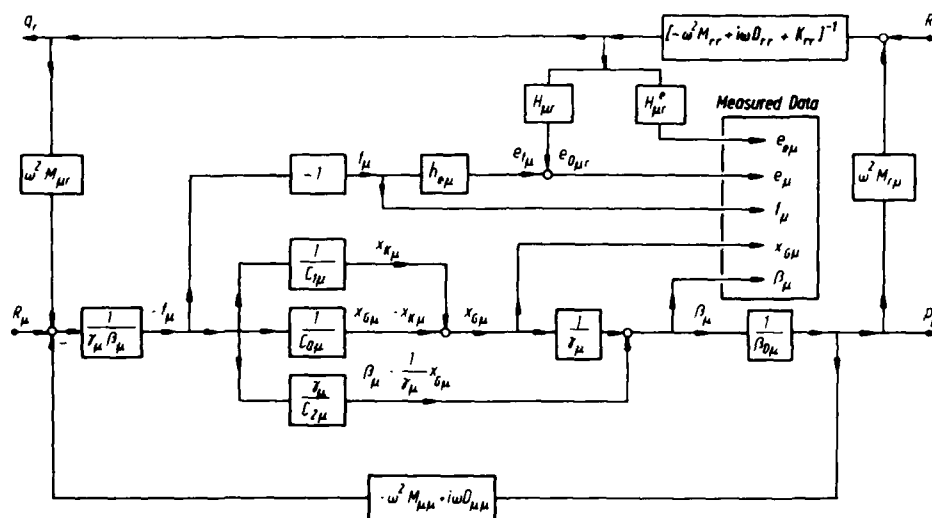


Fig.11: Block diagram showing the coupling between the r -th global aircraft eigenmode and the μ -th rudder degree of freedom of the modified aircraft with dummy actuators (ground vibration test configuration).

Assuming that none of the global aircraft eigenmodes are excited by this force - since there is no immediate eigenfrequency neighborhood of rudder modes and global aircraft eigenmodes - the μ -th rudder rigid body mode can be regarded as a discrete degree of freedom, the equations of motion of which can be formulated as follows with $q_r=0$, ($r=1,2,\dots,n$):

$$(25) \quad f_\mu = -C_{1\mu} x_{K\mu},$$

$$(26) \quad f_\mu = C_{D\mu} (x_{K\mu} - x_{G\mu}),$$

$$(27) \quad n_\mu = -f_\mu \gamma_\mu,$$

$$(28) \quad \delta_\mu = x_{G\mu} / \gamma_\mu + n_\mu / C_{2\mu},$$

with

q_r : generalized coordinate of the r -th global aircraft eigenmode,

f_μ : dummy actuator force,

$C_{D\mu}$: dummy actuator stiffness,

γ_μ : rudder lever arm,

$C_{1\mu}$: nonlinear global attachment stiffness on the wing side,

$C_{2\mu}$: nonlinear global attachment stiffness (in torsion) on the rudder side.

Solving Eqs. (25) to (28) with respect to $C_{1\mu}$ and $C_{2\mu}$ yields:

$$(29) \quad C_{1\mu}(f_\mu) = - \frac{f_\mu C_{D\mu}}{f_\mu + x_{G\mu} C_{D\mu}},$$

$$(30) \quad C_{2\mu}(f_\mu) = \frac{\gamma_\mu f_\mu}{x_{G\mu} / \gamma_\mu - \beta_\mu}.$$

Utilizing the pickups mounted on the dummy actuator, the actuator force f_μ and the displacement $x_{G\mu}$ are measured at various exciting force levels. The hinge angle β_μ is also measured. Introducing the measured data into Eqs. (29) and (30) allows the nonlinear attachment stiffness characteristics to be determined. If the stiffness parameters are available from static tests, these investigations are optional or can be used in order to check static test data.

Performing the test mentioned above, the servo valve spool displacement $e_\mu \approx e_{f\mu}$ - due to the flexibility of the actuator attachment on the wing side - is also measured by means of the servo valve displacement pickup. The nonlinear transfer function of structural recoupling $h_{e\mu}$ can then be calculated as follows:

$$(31) \quad h_{e\mu}(f_\mu) = e_{f\mu} / f_\mu.$$

Further investigations are performed to determine the generalized masses and generalized damping coefficients of the rudder rigid body modes. Thus after termination of these tests the following data are available:

- the rudder rigid body modes ϕ_μ^R with respect to the corresponding normalized unit hinge angles $\beta_{0\mu}$ ($\mu=1,2,\dots,m$),
- the generalized masses $M_{\mu\mu}$,
- the generalized damping coefficients $D_{\mu\mu}$,
- the nonlinear attachment stiffnesses $C_{1\mu}(f_\mu)$ and $C_{2\mu}(f_\mu)$,
- the nonlinear transfer function of structural recoupling $h_{e\mu}(f_\mu)$.

All parameters made available by these tests can be introduced directly into the aeroelastic analysis performed in Section 2.3.

2.2.2 Determination of the modal parameters of the global aircraft eigenmodes

During the performance of the tests described in this section, the electric part of the active control system is in operation. The determination of the modal parameters (eigenfrequencies ν_r , orthogonal global aircraft eigenmodes ϕ_r^E , generalized masses M_{rr} and generalized damping coefficients D_{rr}) is achieved in a conventional ground vibration test (classical phase resonance method, see Ref. [21]). It will be assumed here that due to the eigenfrequency spacing between rudder rigid body modes and global aircraft eigenmodes, there are no rudder rigid body motions contained in the various global aircraft eigenmodes. If this assumption is not fulfilled, the measured ground vibration test data must be corrected by a modification analyses (see Refs. [9,22,23]).

Besides the modal parameters mentioned above, the mechanical servo valve spool displacements $e_{\mu r}$ and the electric servo valve (feedback) input signals $e_{e\mu r}$ are determined in each eigenmode. The double indexing of terms, e.g. the force $f_{\mu r}$, means that this term is related to the μ -th actuator and to the r -th eigenmode. Considering the block diagram of Fig. 11, it can be seen that the mechanical input signal $e_{\mu r}$ is composed as follows out of 2 different parts:

$$(32) \quad e_{\mu r} = e_{0\mu r} + e_{f\mu r},$$

with

$e_{0\mu r}$: mechanical structural feedback signal at zero actuator force,

$e_{f\mu r}$: mechanical structural feedback signal due to the flexibility of the actuator attachment on the wing side.

According to Eq. (31) the following relation can be written for the second term in Eq. (32):

$$(33) \quad e_{f\mu r} = h_{e\mu} \cdot f_{\mu r}.$$

Introducing Eq. (33) into Eq. (32) yields:

$$(34) \quad e_{0\mu r} = e_{\mu r} - h_{e\mu} \cdot f_{\mu r}.$$

With the assumption of linear behavior of the transfer functions characterizing structural feedback effects via the steering control systems, the coefficients $H_{\mu r}$ of the mechanical structural feedback matrix \mathbf{H} are defined as follows:

$$(35) \quad H_{\mu r} = e_{0\mu r} \cdot x_0 / x_{r\max},$$

with $x_0 / x_{r\max}$ as a normalization factor. This factor has to be attributed to the normalization of the various eigenmodes by assigning the value x_0 (generally $x_0 = 1\text{mm}$) to the measured amplitude $x_{r\max}$ of the reference point of the r -th eigenmode. The (complex)

coefficients $H_{\mu r}^e$ of the matrix M^e of electric (active control system) feedback are defined in the same way by the relation

$$(36) \quad H_{\mu r}^e = e_{\mu r} \cdot x_0 / x_{r\max}$$

It has to be postulated that due to the filtering and/or phase shifting properties of the electric feedback systems, the coefficients $H_{\mu r}^e$ can be extensively frequency-dependent. The frequency-dependent behavior of the electric part of the active control system cannot be determined in the ground vibration test, for an excitation of the structure in its eigenmodes is only possible at those frequencies corresponding to the respective eigenfrequencies. The frequency dependence of the coefficients $H_{\mu r}^e$ has to be determined either by calculation or in additional tests as will be shown in Sec.2.2.3.

After completion of the tests performed in this section, the following data are available:

- the eigenfrequencies ν_r of the global aircraft eigenmodes,
- the global aircraft eigenmodes ϕ_r^F ,
- the generalized masses M_{rr} ,
- the generalized damping coefficients D_{rr} ,
- the coefficients $H_{\mu r}$ of the matrix of mechanical structural feedback,
- the coefficients $H_{\mu r}^e$ of the matrix of electric feedback.

2.2.3 Determination of frequency responses of the matrix of electric feedback coefficients

As mentioned in Sec.2.2.2 the determination of the frequency-dependent properties of the matrix of electric feedback in the ground vibration test is impossible. The frequency dependence of the electric feedback systems can be determined by tests performed on the active control system mounted outside the aircraft. The best testing installation for these investigations is the "iron bird" test setup.

On this setup calibration tests are run for each sensor by exciting the sensors one after another at a given amplitude y_ξ and at different frequencies. Exciting the ξ -th sensor ($\xi=1,2,\dots,P$) the input voltage $e_{e\mu\xi}(i\omega)$ is measured at all μ electrohydraulic servo valves ($\mu=1,2,\dots,m$). Knowing the normalized amplitude of oscillation $x_{\xi r}$ of the ξ -th sensor in the r -th eigenmode, the frequency-dependent transfer function $H_{\mu r}^e(i\omega)$ can be calculated as follows when assuming linear behavior of the electric part of the active control system:

$$(37) \quad H_{\mu r}^e(i\omega) = \sum_{\xi=1}^P e_{e\mu\xi}(i\omega) \cdot x_{\xi r} / y_\xi$$

In the case that all transfer functions of the various links of the electric feedback loops (compensation network) as well as of the sensors are known, determination of the frequency responses $H_{\mu r}^e(i\omega)$ is possible by pure calculation.

A check of the frequency responses $H_{\mu r}^e(i\omega)$ determined here is possible by comparing these responses, formed at the frequencies corresponding to the aircraft eigenfrequencies of the global aircraft eigenmodes, to the corresponding coefficients $H_{\mu r}^e$ measured in the ground vibration test. By the end of this chapter all parameters needed for the performance of aeroelastic analyses on aircraft equipped with active control systems have been determined.

2.3 Consideration of active control systems in the generalized aeroelastic equations

Formulation of the aeroelastic equations on the basis of quasi-normal coordinates expressing the elastic displacements of the aircraft by the relation

$$(38) \quad \mathbf{x}(t) = \phi^F \cdot \mathbf{q}(t) + \phi^R \cdot \mathbf{p}(t)$$

with

$\mathbf{x}(t)$: vector of the elastic displacements of the structure,

ϕ^F : modal matrix of the global aircraft eigenmodes,

ϕ^R : modal matrix of the rudder rigid body degrees of freedom,

$\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{p}(t)$: vectors of the generalized (normal) coordinates,

leads to the following generalized equations of motion:

$$(39) \quad \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{r\mu} \\ M_{\mu r} & M_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{p}}_\mu \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{rr} & 0 \\ 0 & D_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{p}}_\mu \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & 0 \\ 0 & K_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{p}_\mu \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{rs} & A_{r\mu} \\ A_{\mu r} & A_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{p}_\mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_r \\ \mathbf{R}_\mu \end{Bmatrix}$$

with

- M** : coupled generalized mass matrix,
- D** : generalized matrix of structural damping,
- K** : generalized stiffness matrix,
- A** : matrix of the generalized unsteady (motion-induced) aerodynamic forces,
- R** : vector of the generalized external forces.

Assuming that the coefficients of the matrix **A** of the generalized unsteady aerodynamic forces can be determined either experimentally or theoretically (see Ref.[24]), all matrix coefficients on the left-hand side of Eq.(39) are available from the tests performed in Sections 2.2.1 through 2.2.3 with exception of the terms $M_{r\mu}$, $M_{\mu r}$, K_{rr} , $K_{\mu\mu}$.

The coupling terms of the symmetric generalized mass matrix can be determined on the basis of a discrete mass matrix **m** of the different rudders, the rudder rigid body modes and the global aircraft modes as follows:

$$(40) \quad M_{r\mu} = M_{\mu r} = (\phi_r^F)^T m \phi_\mu^R, \quad (r=1,2,\dots,n; \mu=1,2,\dots,m)$$

Furthermore the coefficients K_{rr} of the generalized stiffness matrix are related to the coefficients M_{rr} of the generalized mass matrix as follows (see Ref.[9]):

$$(41) \quad K_{rr} = \omega_r^2 \cdot M_{rr},$$

with ω_r as the circular eigenfrequency of the r -th global eigenmode.

Now the missing stiffness coefficients $K_{\mu\mu}$ of the rudder equations of motion can be determined with the help of the actuator displacement equation of motion formulated in Eq.(19). Taking this equation into consideration for the μ -th actuator, we put:

$$(42) \quad e_{\mu\mu} = M_\mu \cdot q,$$

$$(43) \quad e_{I\mu} = H_\mu^e(i\omega) \cdot q,$$

with M_μ and H_μ^e as the μ -th line vectors of the matrices **H** and H^e , respectively, and

$$(44) \quad e_{f\mu} = h_{e\mu} \cdot f_{K\mu}.$$

The expression for the total relative displacement of the servo valve spool can then be formulated as follows:

$$(45) \quad e'_\mu = (M_\mu + G_{em\mu}^R(i\omega) \cdot H_\mu^e(i\omega))q + h_{e\mu} \cdot f_{K\mu} - (1 + G_{em\mu}^R(i\omega) \cdot G_{e\mu}(i\omega)) x_{G\mu}.$$

Furthermore the following compatibility and equilibrium conditions can be formulated (in the same way as in Section 2.2.1) for the μ -th rudder rigid body degree of freedom:

$$(46) \quad f_{K\mu} = -C_{1\mu} \cdot x_{K\mu},$$

$$(47) \quad n_\mu = -f_{G\mu} \cdot \gamma_\mu,$$

$$(48) \quad x_{G\mu} = \gamma_\mu (b_\mu - n_\mu / C_{2\mu}).$$

Introducing Eqs.(45) through (48) into Eq.(19) finally yields the following expression for the hinge angle of the μ -th rudder:

$$(49) \quad b_\mu = (a_{1\mu} \cdot q + a_{2\mu} \cdot n_\mu) / a_{3\mu},$$

with

$$(50a) \quad a_{1\mu} = (X_E(i\omega))_\mu \cdot (M_\mu + H_\mu^e(i\omega) \cdot G_{em\mu}^R(i\omega)),$$

$$(50b) \quad a_{2\mu} = \frac{1}{\gamma_\mu} \left\{ \frac{\gamma_\mu^2}{C_{2\mu}} + \frac{1 - \gamma_\mu^2 / C_{2\mu} \cdot \omega^2 m_{G\mu}}{C_{1\mu} - \omega^2 m_{K\mu}} - (X_{G^F G}(i\omega))_\mu + \right. \\ \left. + (X_E(i\omega))_\mu \cdot \left[h_{e\mu} \left(\frac{\gamma_\mu^2}{C_{2\mu}} \omega^2 m_{G\mu} - 1 - \omega^2 m_{K\mu} \frac{1 - \gamma_\mu^2 / C_{2\mu} \cdot \omega^2 m_{G\mu}}{C_{1\mu} - \omega^2 m_{K\mu}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_\mu^2}{C_{2\mu}} \cdot (1 + G_{em\mu}^R(i\omega) \cdot G_{e\mu}(i\omega)) \right] \right\},$$

and

$$(50c) \quad a_{3\mu} = \gamma_\mu \cdot \left(1 - \frac{\omega^2 m_{G\mu} (1 - \omega^2 m_{G\mu} \cdot X_{G^F G}(i\omega))}{C_{1\mu} - \omega^2 m_{K\mu}} \right) + \\ + (X_E(i\omega))_\mu \gamma_\mu \cdot \left[1 + G_{em\mu}^R(i\omega) G_{e\mu}(i\omega) + h_{e\mu} \omega^2 m_{G\mu} \left(1 + \frac{\omega^2 m_{K\mu}}{C_{1\mu} - \omega^2 m_{K\mu}} \right) \right].$$

If the actuator mass forces are neglected in these equations, say $m_G = m_K = 0$, Eqs. (49) and (50) can be formulated as follows:

$$(51) \quad \delta_\mu = (a_{1\mu}^0 \cdot q + a_{2\mu}^0 \cdot n_\mu) / a_{3\mu}^0,$$

with

$$(52a) \quad a_{1\mu}^0 = a_{1\mu},$$

$$(52b) \quad a_{3\mu}^0 = \gamma_\mu \left[1 + (XE(i\omega))_\mu (1 + G_{em\mu}^R(i\omega) G_{e\mu}(i\omega)) \right],$$

$$(52c) \quad a_{2\mu}^0 = \frac{1}{\gamma_\mu \cdot C_{B\mu}},$$

and

$$(53) \quad C_{B\mu} = \left\{ \frac{\gamma_\mu^2}{C_{2\mu}} + \frac{1}{C_{1\mu}} - (X_G^F(i\omega))_\mu + (XE(i\omega))_\mu \left[\frac{\gamma_\mu^2}{C_{2\mu}} (1 + G_{em\mu}^R(i\omega) \cdot G_{e\mu}(i\omega)) - h_{e\mu} \right] \right\}^{-1}.$$

Although Eqs. (49) and (50) can easily be handled in a computer software program, further considerations will be based here on Eqs. (51) through (53). Introducing the following relations

$$(54) \quad \delta_\mu = \delta_{0\mu} \cdot p_\mu,$$

and

$$(55) \quad R_\mu = n_\mu \cdot \delta_{0\mu},$$

with $\delta_{0\mu}$ as the normalized unit hinge angle of the μ -th rudder degree of freedom into Eqs. (51) to (53) yields:

$$(56) \quad R_\mu = \sum_{r=1}^n K_{\mu r} q_r + K_{\mu\mu} p_\mu,$$

with

$$(57) \quad K_{\mu\mu} = C_{B\mu} \gamma_\mu^2 \delta_{0\mu}^2 \left[1 + (XE(i\omega))_\mu \cdot (1 + G_{em\mu}^R(i\omega) G_{e\mu}(i\omega)) \right]$$

and

$$(58) \quad K_{\mu r} = -C_{B\mu} \gamma_\mu \delta_{0\mu} \cdot (XE(i\omega))_\mu \cdot (H_{\mu r} + H_{\mu r}^e(i\omega) \cdot G_{em\mu}^R(i\omega)).$$

As can be seen from Eq. (56), the generalized stiffness matrix listed in Eq. (39) is a diagonal matrix only if all (mechanical and electric) feedback effects are neglected. Normally this matrix will be filled in its lower left-hand part by the coupling terms $K_{\mu r}$. In the case of a harmonic motion, Eq. (39) can then be rewritten as follows:

$$(59) \quad \begin{bmatrix} -\omega^2 & \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{r\mu} \\ M_{\mu r} & M_{\mu\mu} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} D_{rr} & 0 \\ 0 & D_{\mu\mu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 M_{rr} & 0 \\ K_{\mu r} & K_{\mu\mu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{rs} & A_{r\mu} \\ A_{\mu r} & A_{\mu v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\hat{q}_r\} \\ \{\hat{p}_\mu\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\hat{R}_r\} \\ \{\hat{R}_\mu\} \end{bmatrix}.$$

Eq. (59) describes the extended generalized aeroelastic equations of aircraft with active control systems. It has to be noted that due to the actuator and electric feedback loop characteristics, the coefficients $K_{\mu\mu}$ and $K_{\mu r}$ are complex as well as frequency- and amplitude-dependent. Calculating the dynamic response of the aircraft structure to a harmonic external excitation $\{\hat{R}_r, \hat{R}_\mu\}^T$ (the roofed letters mark peak pulse amplitudes), Eq. (59) has to be solved with respect to the vector of generalized coordinates $\{\hat{q}_r, \hat{p}_\mu\}^T$. Introducing this vector into Eq. (38) permits the determination of the elastic displacements of the aircraft structure. All mathematical relations formulated in this section are clearly displayed in the block diagram of Fig. 12 (the aerodynamic forces are neglected).

Comment: Since the transfer properties of the actuators were determined in the form of frequency responses, valid only in the case of a harmonic actuator excitation, the extended generalized aeroelastic equations were formulated here for the special case of harmonic aircraft motion. Due to the nonlinear effects it is not possible to calculate the (total) system response to a (nonharmonic) periodic external excitation by superposition of harmonic responses to different external excitations (determined by a Fourier-analysis of the periodic exciting

3. Application of the method to the example of a rudder/wing model structure

In order to check the practicability and accuracy of the method described in Chapter 2, the method was applied to the example of a wing model structure with a rudder driven by a hydraulic actuator (Figs.13 and 14). The actuator used for driving the rudder was equipped with only an electrohydraulic servo valve, thus only electric (control) signals could be used as servo valve input signals.

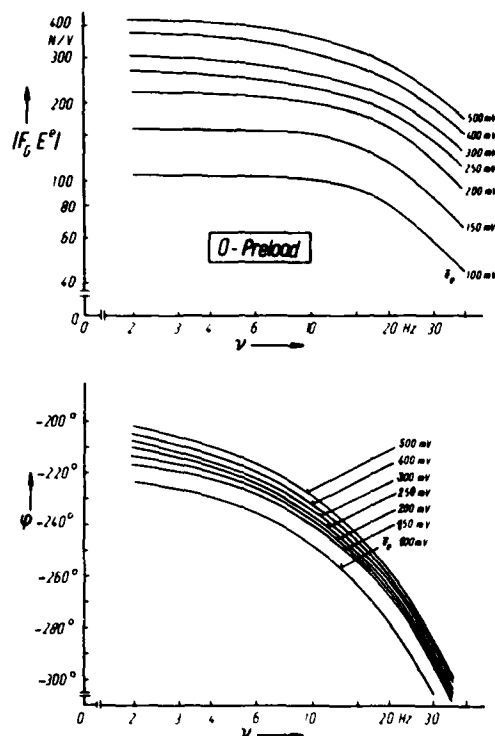


Fig.15: Frequency response plot of the transfer function $F_G E^e(s)$.

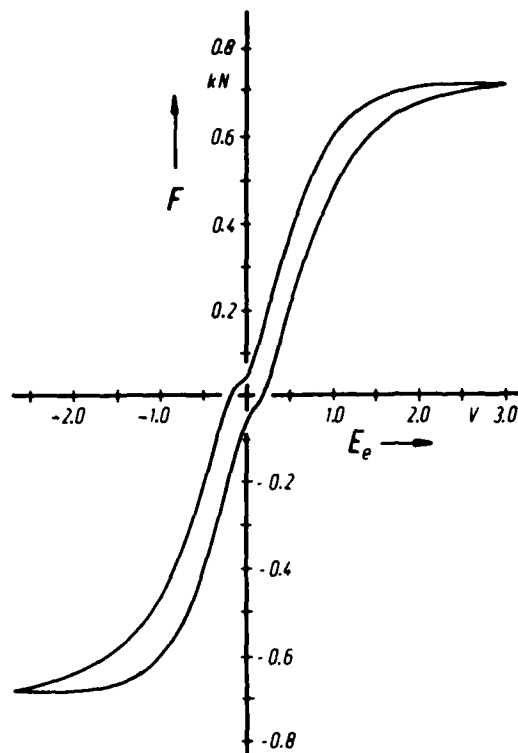


Fig.16: Quasi-static characteristic of the actuator force versus the servo valve input voltage.

3.1 Actuator tests

The actuator tests were performed as described in Section 2.1. As a result Fig.15 shows a frequency response plot of the measured transfer function $F_G E^e(s)$ (comparable to the transfer function $F_G E(s)$ listed in Eq.(6b) in the case of an actuator with mechanical and electric controls). Due to the nonlinearity in the neighborhood of zero force of the quasi-statically determined force-electric input voltage characteristic (Fig.16), the magnitude characteristics of the plot shown in Fig.15 are in good agreement with the linearized values taken from the quasi-static curve only at high levels of the electric excitation (and at low frequencies). For stability reasons actuators controlled by electric input signals have to be equipped with a displacement pickup operating in a feedback loop (Fig.17a). In the case of the actuator used here, this displacement pickup was integrated in the actuator power cylinder block. During the performance of the actuator tests, also the frequency response of the transfer function $G_X(s)$ of this displacement feedback loop was determined.

3.2 Ground vibration test

The ground vibration test was performed in the frequency range from 0 to 140 Hz where 6 eigenfrequencies were determined. The eigenmodes and the modal parameters corresponding to the two lowest eigenfrequencies are drawn in Figs.17b and 17c. Fig.17d shows the rudder rigid body mode. While performing the tests, no attention had to be paid to the attachment stiffnesses C_1 and C_2 , for the values of these stiffnesses were by far higher than the actuator stiffness taken into consideration in the later analysis.

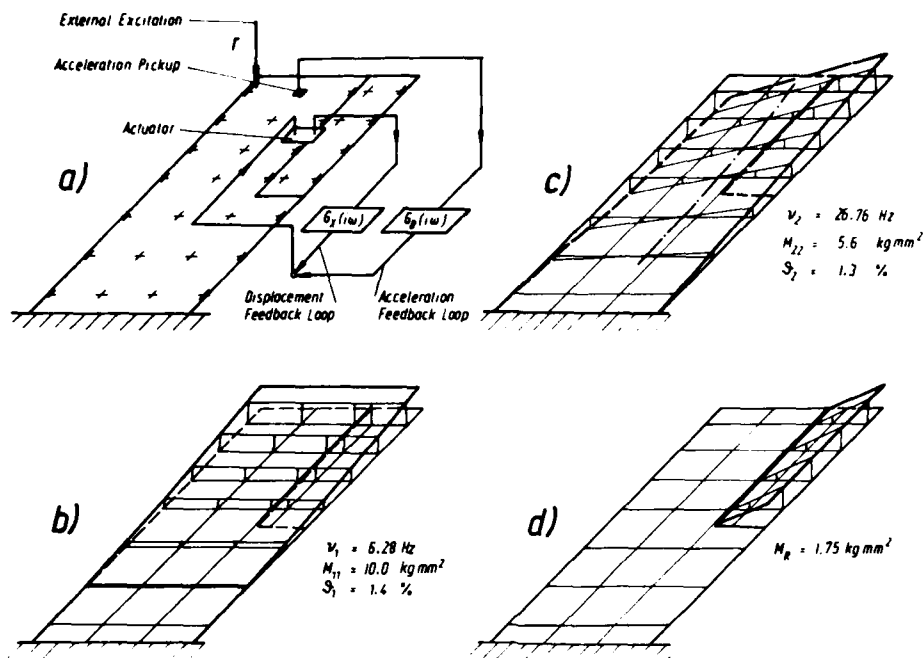


Fig.17: a) Sketch of rudder/wing model with electric feedback loops.
b) First bending eigenmode.
c) First torsional eigenmode.
d) Rudder degree of freedom.

3.3 Comparison between measured and calculated results

To check the method proposed here, dynamic response tests and calculations were performed on the rudder/wing model structure. Thereby the wing was excited by a swept sine signal with the help of an electrodynamic exciter (see Fig.17a). The aim of the investigations was to determine the rudder hinge angle β (in form of a polar plot) relative to the exciting force signal. The dynamic response calculations were performed in accordance with the procedure described in Section 2.3 on the basis of the data resulting from the actuator tests as well as from the ground vibration test delineated in Sections 3.1 and 3.2, respectively.

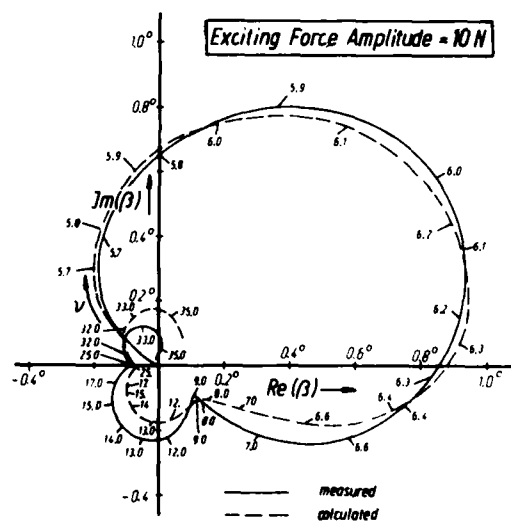
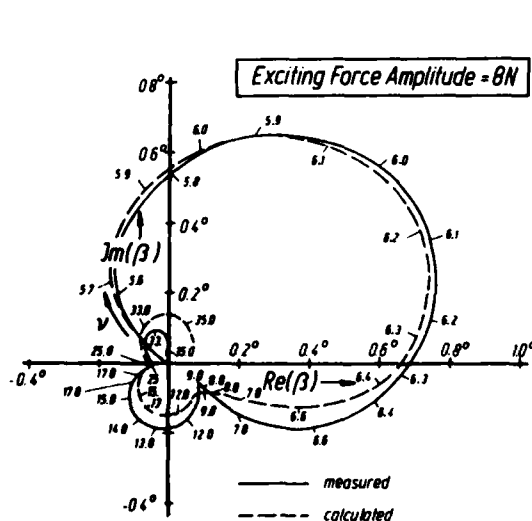


Fig.18: Polar plot of the rudder hinge angle β (Exciting force amplitude = 8N).

Fig.19: Polar plot of the rudder hinge angle β (Exciting force amplitude = 10N).

As a result of these investigations 2 polar plots of the rudder hinge angle δ (related to 2 different levels of the exciting force amplitude) are drawn in Figs.18 and 19. Because of stability reasons the displacement feedback loop shown in Fig.17a had to be considered when performing these investigations. Figs.18 and 19 show good agreement between

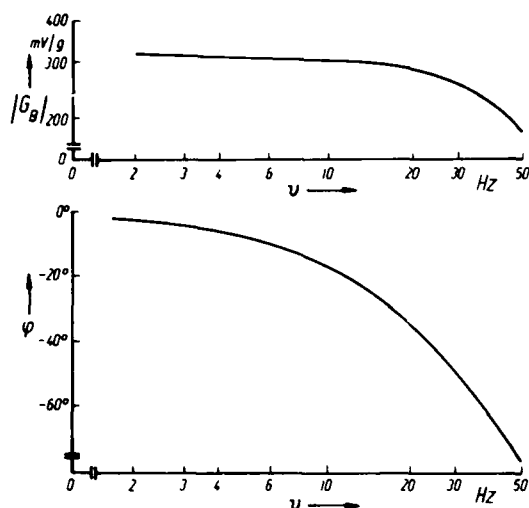


Fig.20: Frequency response of the acceleration feedback loop.

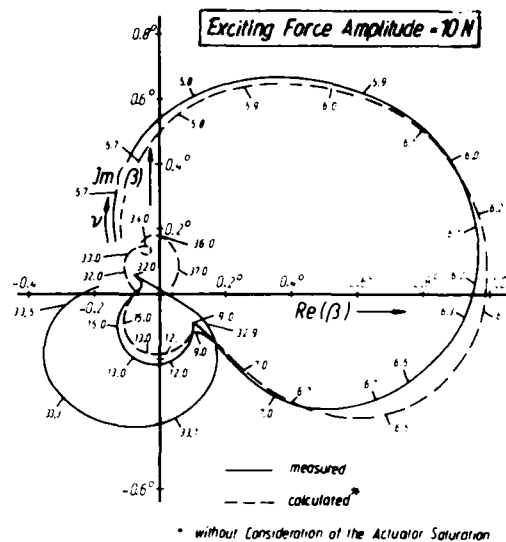


Fig.21: Polar plot of the rudder hinge angle δ (Consideration of the acceleration feedback loop).

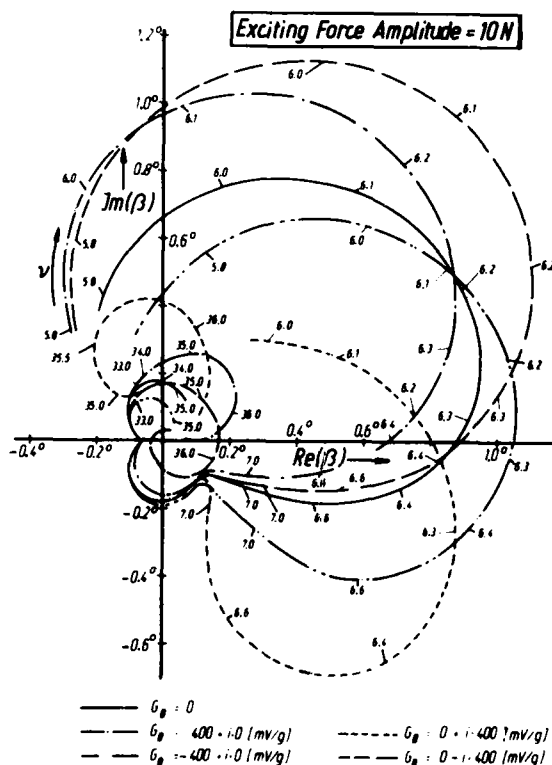


Fig.22: Polar plot of the rudder hinge angle δ (Consideration of different acceleration feedback loops).

measured and calculated results. In these figures the first polar plot "circle" is attributed to the wing first bending mode, the second "circle" to the rudder degree of freedom and the third to the wing second bending mode. The 45-degree rotation of the first "circle" (compared to the case of a real rudder/wing attachment stiffness) is due to the phase lag characteristics of the actuator admittance.

In a second step the acceleration feedback loop shown in Fig.17a was added. For stability reasons a filtering element was integrated into the electric feedback network. The resulting frequency response of the acceleration feedback loop is drawn in Fig.20. The corresponding polar plot of the rudder hinge angle δ is shown in Fig.21. Good agreement can be observed between measured and calculated results in the case of the wing first bending mode and the rudder rigid body mode. The discrepancy in the wing second bending mode case is due to the effect of actuator saturation. Actuator data valid for the saturation condition could not be introduced into the calculations, for the previous actuator tests had not been performed at such high actuator force levels. Fig.21 shows that due to the acceleration feedback loop, there is a further rotation of the first polar plot "circle" of about 20 degrees. The phase lag increase

has to be attributed to the filtering element in the acceleration feedback loop and to the phase lag characteristics of the frequency response $XE^e(i\omega)$. The rather oval form of the polar plot "circles" is due to the nonlinear properties of the frequency response $XE^e(i\omega)$.

The good agreement between measured and calculated results shown in Figs. 18, 19 and 21 confirms the consistency of the method elaborated here. Finally an interesting result may be shown, obtained by pure calculation on the rudder/wing model structure. Fig. 22 delineates the effect of a phase change in the acceleration feedback loop on the rudder hinge angle polar plot. Therefrom it is obviously of paramount importance to consider the electric (active control system) and mechanical (deformations of the steering mechanism rods) properties of the feedback systems in a correct way when performing aeroelastic qualification analyses and to exercise care when determining the dynamic properties of these systems, for they can largely affect the dynamic behavior of the aircraft.

4. Conclusion

Introducing active control systems into modern aircraft design requires the development of special test and analytical procedures for the aeroelastic qualification of this aircraft type. The principal problem encountered when performing aeroelastic investigations on aircraft with active control systems consists in the fact that such elastomechanic structures cannot be regarded as (quasi-)linear and (quasi-)conservative systems; thus the limits of validity of many conventional test and analytical procedures are greatly exceeded.

As a solution to the various problems encountered during the aeroelastic qualification, a method for the performance of ground vibration tests on aircraft with active control systems has been described. Thereby the active hydraulic actuators are replaced by passive dummy actuators. By this step the elastomechanic aircraft structure is linearized and reveals conservative properties such that conventional ground vibration test methods can be applied. Furthermore an experimental-analytical method for determination of the nonlinear and preload-dependent frequency responses of the actuator transfer functions has been pointed out which permits the consideration of aircraft active control systems in the generalized aeroelastic equations by addition of correction terms.

The validity and applicability of the elaborated aeroservoelastic advances has been checked using the example of a wing model structure with a rudder driven by a hydraulic actuator. By comparison of the measured and calculated dynamic response of the rudder hinge angle (for a given excitation of the wing), good agreement could be shown between the measured and calculated results. Furthermore it has been presented that recoupling effects due either to the mechanical systems (steering mechanisms) or to the electric feedback system (active control system) can widely affect the dynamic behavior of the aircraft. It is therefore of primary importance to consider these feedback systems very carefully when performing aeroelastic qualification tests or analyses.

5. References

- [1] Stability and Control.
AGARD Conference Proceedings 260 (1978).
- [2] Impact of Active Control Technology on Airplane Design.
AGARD Conference Proceedings 157 (1974).
- [3] Specialists Meeting on Flutter Suppression and
Structural Load Alleviation.
AGARD Conference Proceedings 175 (1975).
- [4] Poisson-Quinton, P.
Wanner, J.C. Évolution de la conception des avions grâce aux commandes
automatiques généralisées.
L'Aéronautique et L'Astronautique No. 71 (1978), pp. 11-41.
- [5] McRuer, D.T.
Benun, D.
Click, G.E. The Influence of Servomechanism on the Flutter of
Servo Controlled Aircraft.
US Air Force Techn. Rep. 6287 (1954).
- [6] Benun, D. The Influence of Powered Controls.
AGARD Manual of Aeroelasticity, Vol. 1, Chapter 5 (1959).
- [7] Försching, H. Einfluß servomechanischer Steuerungs- und Stabilitäts-
systeme auf das Flatterverhalten von Flugzeugen.
Zeitschrift f. Flugwissenschaften, Heft 1 (1973), pp. 22-31.
- [8] Wittmeyer, H. Flattergleichungen mit Berücksichtigung einer Servosteuerung
und eines Flugreglers.
Zeitschrift f. Flugwissenschaften, Heft 2 (1974), pp. 37-40.
- [9] Freymann, R. Über das aeroelastische Verhalten von Flugzeugen mit
aktiven Servo-Kontrollsystemen.
DFVLR-Forschungsbericht 81-05 (1981).

- [10] Beier, T. Prediction and Measurement of the Dynamic Stiffness and Damping of Hydraulic Servo-Actuators. AIAA-Paper 77-420 (1977), pp.107-116.
- [11] Wigley, T. Impedance Testing of Tornado Rudder Actuator 94473 to Determine the Effect of Changing Inner Quad Loop Gain from 200 to 124 sec⁻¹. British Aircraft Corporation Report T.N.3821.
- [12] Woods, A.G. A300B Aileron Jack Impedance Tests. Hawker Siddely Aviation Ltd., Report HSA HAD-R-300-6532/AGW (1973).
- [13] Münch, I. Impedanzmessungen an den hydraulischen Rudermaschinen Do 31. Versuchsbericht Dornier-Werke GmbH Friedrichshafen, VK 501-B1 (1967).
- [14] Bogoljubow, N.N.
Mitropolski, J.A. Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen. Akademie-Verlag, Berlin (1965).
- [15] Freymann, R. Beschreibung des dynamischen Verhaltens hydraulischer Aktuatoren. Ölhydraulik und Pneumatik, Heft 10 (1979), pp.735-739.
- [16] Breitbach, E. Die Bedeutung struktureller Nichtlinearitäten aus der Sicht der Strukturdynamik und Aeroelastik. DLR-Forschungsbericht 77-34, pp.7-19 (1977).
- [17] Küssner, H.G.
Breitbach, E. Bestimmung der Korrekturglieder der Bewegungsgleichungen bei Änderung eines elastomechanischen Systems. AVA-Bericht 69 J 01 (1969).
- [18] Breitbach, E. Effects of Structural Non-Linearities on Aircraft Vibration and Flutter. AGARD Report 665 (1977).
- [19] Freymann, R. Anwendung und Vergleich modaler Perturbationsmethoden und modaler Korrekturverfahren am Beispiel eines Pfeilflügels mit zwei Pylonaußenlasten. DLR-Forschungsbericht 77-21 (1977).
- [20] Försching, H. Grundlagen der Aeroelastik. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York (1974).
- [21] Breitbach, E. A Semi-Automatic Modal-Survey Test Technique for Complex Aircraft and Spacecraft Structures. Proceedings ESRO Testing Symposium, ESRO-SP-99 (1977), pp.519-528.
- [22] Wittmeyer, H. Änderung eines Standschwingungsergebnisses beim Erstarrenlassen einiger Freiheitsgrade. Zeitschrift f. Flugwissenschaften, Heft 6 (1973), pp.213-215.
- [23] Hüners, H. Berücksichtigung der Ruderfreiheitsgrade im Flatternachweis von Flugzeugen. DFVLR-AVA-Bericht IB 253-78 J 07 (1978).
- [24] Försching, H. Prediction of the Unsteady Airloads on Oscillating Lifting Systems and Bodies for Aeroelastic Analyses. Progress in Aerospace Sciences, Vol.18, Nr.3 (1978), pp.211-269.
- [25] Dorf, R.C. Modern Control Systems. Addison-Wesley Publishing Company, Amsterdam/London/Manila/Singapore/Sydney/Tokio (1976).

REPORT DOCUMENTATION PAGE													
1. Recipient's Reference	2. Originator's Reference	3. Further Reference	4. Security Classification of Document										
	AGARD-R-698	ISBN 92-835-0296-5	UNCLASSIFIED										
5. Originator	Advisory Group for Aerospace Research and Development North Atlantic Treaty Organization 7 rue Ancelle, 92200 Neuilly sur Seine, France												
6. Title	NON-LINEAR AEROELASTIC ANALYSES AND TESTING												
7. Presented at	the 52nd Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel held in Çeşme, Turkey on 5-10 April 1981.												
8. Author(s)/Editor(s)	R.Dat, P.Dunoyer and R.Freymann		9. Date July 1981										
10. Author's/Editor's Address	See Flyleaf		11. Pages 42										
12. Distribution Statement	This document is distributed in accordance with AGARD policies and regulations, which are outlined on the Outside Back Covers of all AGARD publications.												
13. Keywords/Descriptors	<table border="0"> <tbody> <tr> <td>Aeroelasticity</td> <td>Nonlinear systems</td> </tr> <tr> <td>Vibration tests</td> <td>Dynamic tests</td> </tr> <tr> <td>Aircraft</td> <td>Control surfaces</td> </tr> <tr> <td>Flight control</td> <td>Actuators</td> </tr> <tr> <td>Active control</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Aeroelasticity	Nonlinear systems	Vibration tests	Dynamic tests	Aircraft	Control surfaces	Flight control	Actuators	Active control	
Aeroelasticity	Nonlinear systems												
Vibration tests	Dynamic tests												
Aircraft	Control surfaces												
Flight control	Actuators												
Active control													
14. Abstract	<p>This report comprises two papers presented to the Sub-Committee on Aeroelasticity. One gives an exposition of the ground vibration testing of aircraft with active control systems. The other presents a method of performing and interpreting dynamic tests on non-linear systems, such as control surface actuators.</p>												

<p>AGARD Report No.698 Advisory Group for Aerospace Research and Development, NATO NON-LINEAR AEROELASTIC ANALYSES AND TESTING by R.Dat, P.Dunoyer and R.Freyermann Published July 1981 42 pages</p> <p>This report comprises two papers presented to the Subcommittee on Aeroelasticity. One gives an exposition of the ground vibration testing of aircraft with active control systems. The other presents a method of performing and interpreting dynamic tests on nonlinear systems, such as control surface actuators.</p> <p>Papers presented at the 52nd Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel held in Çeşme, Turkey on 5-10 April 1981.</p> <p>ISBN 92-835-0296-5</p>	<p>AGARD-R-698</p> <p>Aeroelasticity Vibration tests Aircraft Flight control Active control Nonlinear systems Dynamic tests Control Surfaces Actuators</p>	<p>AGARD Report No.698 Advisory Group for Aerospace Research and Development, NATO NON-LINEAR AEROELASTIC ANALYSES AND TESTING by R.Dat, P.Dunoyer and R.Freyermann Published July 1981 42 pages</p> <p>This report comprises two papers presented to the Subcommittee on Aeroelasticity. One gives an exposition of the ground vibration testing of aircraft with active control systems. The other presents a method of performing and interpreting dynamic tests on nonlinear systems, such as control surface actuators.</p> <p>Papers presented at the 52nd Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel held in Çeşme, Turkey on 5-10 April 1981.</p> <p>ISBN 92-835-0296-5</p>	<p>AGARD-R-698</p> <p>Aeroelasticity Vibration tests Aircraft Flight control Active control Nonlinear systems Dynamic tests Control Surfaces Actuators</p>
<p>AGARD Report No.698 Advisory Group for Aerospace Research and Development, NATO NON-LINEAR AEROELASTIC ANALYSES AND TESTING by R.Dat, P.Dunoyer and R.Freyermann Published July 1981 42 pages</p> <p>This report comprises two papers presented to the Subcommittee on Aeroelasticity. One gives an exposition of the ground vibration testing of aircraft with active control systems. The other presents a method of performing and interpreting dynamic tests on nonlinear systems, such as control surface actuators.</p> <p>Papers presented at the 52nd Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel held in Çeşme, Turkey on 5-10 April 1981.</p> <p>ISBN 92-835-0296-5</p>	<p>AGARD-R-698</p> <p>Aeroelasticity Vibration tests Aircraft Flight control Active control Nonlinear systems Dynamic tests Control Surfaces Actuators</p>	<p>AGARD Report No.698 Advisory Group for Aerospace Research and Development, NATO NON-LINEAR AEROELASTIC ANALYSES AND TESTING by R.Dat, P.Dunoyer and R.Freyermann Published July 1981 42 pages</p> <p>This report comprises two papers presented to the Subcommittee on Aeroelasticity. One gives an exposition of the ground vibration testing of aircraft with active control systems. The other presents a method of performing and interpreting dynamic tests on nonlinear systems, such as control surface actuators.</p> <p>Papers presented at the 52nd Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel held in Çeşme, Turkey on 5-10 April 1981.</p> <p>ISBN 92-835-0296-5</p>	<p>AGARD-R-698</p> <p>Aeroelasticity Vibration tests Aircraft Flight control Active control Nonlinear systems Dynamic tests Control Surfaces Actuators</p>

DAT
ILM